Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 2000

00-1) Esercizio n. 1 del 26/1/2000

Una tipica nube temporalesca puó essere modellata come un condensatore con le armature orizzontali di 10 Km^2 di area, separati da una distanza verticale di 5 Km. Prima di scaricarsi generando un fulmine l'armatura superiore contiene una carica totale positiva di 300 C e quella inferiore la stessa quantitá di segno negativo. Calcolare: a) l'energia elettrostatica immagazzinata nella nube prima della scarica; b) la differenza di potenziale fra le armature; c) il campo elettrico all'interno della nube, confrontando il risultato con la rigiditá dielettrica dell'aria (3 MV/m). Rispondere ai quesiti secondo l'ordine di presentazione, sfruttando per ciascuno di essi esclusivamente i dati iniziali del problema.

Come sappiamo l'energia elettrostatica immagazzinata nel campo elettrico generato da una distribuzione di cariche é:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_{\text{tutto lo spazio}} |E|^2 d^3 r$$

Poiché all'interno di un condensatore piano il campo, esistente soltanto all'interno del condensatore, é uniforme, si ha:

$$W = \frac{1}{8\pi k} |E|^2 S d$$

essendo S la superficie di ciascuna armatura e d la distanza fra esse.

D'altra parte, sappiamo che il campo elettrico all'interno di un condensatore piano, in funzione della carica esistente sulle armature si esprime:

$$E = 4\pi k \sigma = 4\pi k \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

Ne segue:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 S^2} S d = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S} = \frac{0.5 \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^6} = \underline{\underline{2.6 \cdot 10^{12}\ Joule}}$$

La differenza di potenziale fra le armature é data da:

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} = \frac{300 \cdot 5 \cdot 10^3}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^6} = \underline{\underline{16.9 \cdot 10^9\ V}}$$

Il campo elettrico é:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{300}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^6} = \underline{\underline{3.39 \cdot 10^6\ V/m}}$$

che é effettivamente maggiore della rigiditá dielettrica dell'aria.

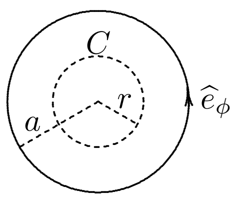
00-2) Esercizio n. 2 del 26/1/2000

Si consideri un conduttore cilindrico infinitamente lungo, di raggio a, percorso da corrente I la cui densitá é uniforme in ciascun punto della sezione del conduttore. Calcolare il vettore induzione magnetica $\vec{B}$ nei punti interni ed esterni al conduttore.

Consideriamo una sezione trasversale del conduttore ed applichiamo il teorema di Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \widehat{n} da$$

essendo $\vec{J} = J_z \widehat{z}$ e $\widehat{n} = \widehat{z}$.



É conveniente scrivere il teorema di Ampere in coordinate cilindriche tenendo conto che: $d\vec{l} = r d\phi \widehat{e}_\phi$.

Ne segue:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi r d\phi$$

Sia C una circonferenza di raggio r interna al conduttore di raggio a ossia $r \leq a$.

Si ha, allora:

$$\oint_C B_\phi r d\phi = \mu_0 J \pi r^2$$

ossia:

$$B_\phi 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

da cui:

$$\boxed{B_\phi = \mu_0 J \frac{r}{2} \qquad (0 \leq r \leq a)}$$

e, poiché $J = \dfrac{I}{\pi a^2}$, si ha:

$$\boxed{\vec{B} = B_\phi \widehat{e}_\phi = \mu_0 I \frac{r}{2\pi a^2} \widehat{e}_\phi \qquad (0 \leq r \leq a)}$$

Analogamente, considerando una circonferenza C di raggio $r \geq a$, si ha:

$$B_\phi 2\pi r = \mu_0 I \qquad (r \geq a)$$

ossia:

$$\boxed{\vec{B} = B_\phi \widehat{e}_\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \widehat{e}_\phi \qquad (r \geq a)}$$

00-3) Esercizio n. 3 del 26/1/2000

Con riferimento al quesito n. 2, si valuti esplicitamente la quantitá $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ sia nei punti interni che in quelli esterni al conduttore e si verifichi la congruenza con la corrispondente equazione della magnetostatica.

Esprimiamo la quantitá $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ in coordinate cilindriche, sostituendo ad $\vec{F}$ il vettore $\vec{B}$ calcolato nel problema precedente.

Poiché $\vec{B} = B_\phi \widehat{e}_\phi$, si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right] \widehat{z}$$

Nei punti interni, come calcolato nel problema precedente, risulta:

$$B_\phi = \mu_0 \frac{r}{2} J$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0 J \frac{1}{2} r^2 \right) \right] \widehat{z} = \mu_0 J \widehat{z} = \mu_0 \vec{J} \qquad (0 \le r \le a)$$

Nei punti esterni, come calcolato nel problema precedente, risulta:

$$B_\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \right) \right] \widehat{z} = 0 \qquad (r \ge a)$$

Le formule trovate sono congruenti con le leggi della magnetostatica.

00-4) Esercizio n. 4 del 26/1/2000

Si consideri un condensatore piano le cui armature di 50 cm^2 di area sono separati da uno strato di porcellana di spessore $a = 1\ cm$. I parametri della porcellana sono: $\epsilon_r = 5.5$ e $\sigma = 10^{-14}\ S/m$. Se ai capi delle armature é applicata una differenza di potenziale $\Phi(t) = 110\sqrt{2}\cos(120\pi t)$, calcolare: a) la densita di corrente di conduzione; b) la densitá di corrente di spostamento; c) la corrente totale che attraversa il capacitore.

Il campo elettrico all'interno dello strato di porcellana é:

$$E(t) = \frac{\Phi(t)}{a} = \frac{110 \cdot \sqrt{2}\cos(120\pi t)}{0.01} = 1.1 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}\cos(120\pi t)\ V/m$$

La densitá corrente di conduzione é:

$$J_c = \sigma E(t) = 10^{-14} \cdot 1.1 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}\cos(120\pi t) = \underline{\underline{1.1 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-10}\cos(120\pi t)\ A/m^2}}$$

La densitá di corrente di spostamento é:

$$J_d = \frac{dD}{dt} = \epsilon\frac{dE(t)}{dt} = \epsilon_0\epsilon_r\frac{dE(t)}{dt} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 5.5[-1.1 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot 120\pi\sin(120\pi t)] =$$
$$= \underline{\underline{-2.86 \cdot 10^{-4}\sin(120\pi t)\ A/m^2}}$$

La corrente totale é:

$$I = (J_c + J_d)A$$

essendo $A = 50\ cm^2$ l'area di ciascuna armatura del condensatore.

Poiché $J_c << J_d$ si puó dire che:

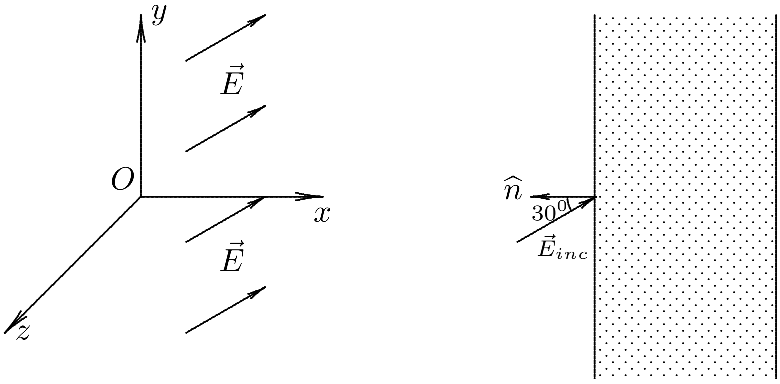
$$I \simeq J_d A = \underline{\underline{-1.43 \cdot 10^{-6}\sin(120\pi t)\ A}}$$

00-5) Esercizio n. 1 del 23/2/2000

Una sottile lastra dielettrica infinitamente estesa, di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1.5$, é posta, in aria, in un campo elettrico esterno uniforme di modulo $E = 10^5\ V/m$. Se la normale alla lastra forma un angolo di 30^0 con la direzione del campo, calcolare il campo elettrico (in direzione, modulo e verso) all'interno della lastra nonché la densitá di carica superficiale σ_P sulle superfici della lastra.

(vedi Esercizi svolti di Fisica II: es. 1 del 21/1/89, es. 2 del 26/6/93, es. 2 de 28/1/95, es.2 del 29/1/99)

Consideriamo un sistema di riferimento $Oxyz$. É conveniente orientare tale sistema in modo che le facce della lastra giacciono su piani paralleli al piano yz. Conseguentemente il vettore $\vec{E}$, che supponiamo giacere su piani paralleli al piano xy, formerá un angolo di 30^0 con l'asse x.



In questo modo il versore normale alla lastra é orientato secondo l'asse x negativo.

Scomponiamo, ora, il campo elettrico sulla superficie della lastra (che denominiamo per comoditá $\vec{E}_{inc}$) nelle due componenti, tangente e normale, cioé:

$$\vec{E}_{inc} = \widehat{x} E \cos 30^0 + \widehat{y} E \sin 30^0$$

essendo E il modulo del campo elettrico incidente.

Dobbiamo applicare le condizioni al contorno sulla superficie della lastra che si affaccia verso il campo elettrico incidente. Esse sono:

$$(E_l)_t = (E_{inc})_t$$

$$(D_l)_n = (D_{inc})_n$$

Si ha, quindi:

$$(E_l)_t = E sin 30^0$$

$$(E_l)_t = \epsilon_0 E \cos 30^0$$

Quindi il campo elettrico all'interno della lastra é:

$$\vec{E}_l = \widehat{x}\frac{E}{\epsilon_r}\cos 30^0 + \widehat{y}E\sin 30^0$$

il cui modulo é:

$$E_l = \sqrt{\frac{E^2}{\epsilon_r^2}\cos^2 30^0 + E^2\sin^2 30^0} = E\sqrt{\frac{3}{4\cdot(1.5)^2}+\frac{1}{4}} =$$
$$= E\sqrt{0.3333+0.25} = 0.7637E = \underline{\underline{0.7637\cdot 10^5\ V/m}}$$

Il vettore polarizzazione é:

$$\vec{P} = \chi_e\vec{E}_l = \epsilon_0(\epsilon_r-1)\vec{E} = \widehat{x}\frac{\epsilon_0(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r}E\cos 30^0 + \widehat{y}\epsilon_0(\epsilon_r-1)E\sin 30^0$$

La densitá di carica superficiale é allora:

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\widehat{n} = \widehat{x}\left[\frac{\epsilon_0(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r}E\cos 30^0\right]\cdot(-\widehat{x}) = -\frac{\epsilon_0(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r}E\cos 30^0 = \underline{\underline{-2.56\cdot 10^{-7}\ C/m^2}}$$

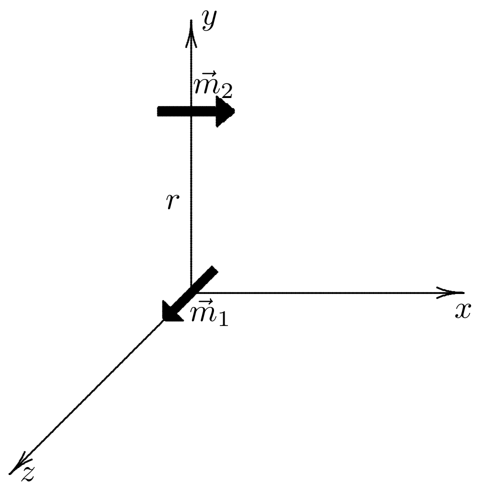
Sull'altra faccia, ovviamente, si ha:

$$\sigma_P = \underline{\underline{+2.56\cdot 10^{-7}\ C/m^2}}$$

00-6) Esercizio n. 2 del 23/2/2000

Si abbiano due dipoli magnetici $\vec{m}_1 = \widehat{z}m_1$ e $\vec{m}_2 = \widehat{x}m_2$. Il primo é posto nell'origine delle coordinate ed il secondo sull'asse y del sistema di riferimento ad una distanza r dall'origine. Calcolare la forza ed il momento meccanico che il primo dipolo esercita sul secondo.

(vedi Esercizi svolti di Fisica II: es. 3 del 3/6/89, es. 3 del 5/10/99)



La forza esercitata dal dipolo $\vec{m}_1$ sul dipolo $\vec{m}_2$ é data dalla formula:

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{12})$$

essendo $\vec{B}_{12}$ il campo di induzione magnetica generato dal dipolo 1 nel punto in cui é situato il dipolo 2.

Si ha:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

Nel nostro caso é:

$$\vec{m}_1 = m_1\widehat{z} \qquad e \qquad \vec{r} = r\widehat{y}$$

Segue:

$$\vec{B}_{12}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3[m_1\widehat{z}\cdot(r\widehat{y})]}{r^5} - \frac{m_1\widehat{z}}{r^3}\right\}$$

cioé:

$$\vec{B}_{12}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1}{r^3}\widehat{z}$$

Allora per la forza si ha:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}\left[m_2\widehat{x}\cdot\left(-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1}{r^3}\widehat{z}\right)\right] = 0}}$$

Il momento meccanico esercitato dal dipolo $\vec{m}_1$ sul dipolo $\vec{m}_2$ é dato da:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{m}_2 \times \vec{B}_{12}$$

É importante osservare che la suddetta formula si puó applicare in quanto essendo il dipolo $\vec{m}_2$ puntiforme, il campo $\vec{B}_{12}$ é su di esso uniforme.

Si ha, allora:

$$\vec{\tau}_2 = m_2\widehat{x} \times \left(-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1}{r^3}\right)\widehat{z}$$

Poiché:

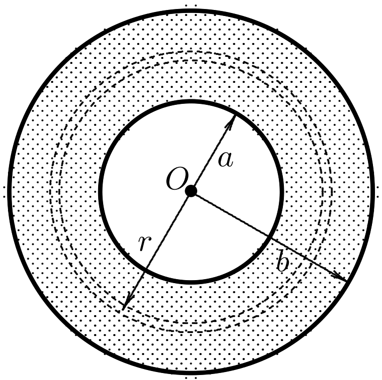
$$\widehat{x} \times \widehat{z} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\widehat{y}$$

risulta:

$$\boxed{\vec{\tau}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{r^3}\widehat{y} \qquad (N \cdot m)}$$

00-7) Esercizio n. 3 del 23/2/2000

Una quantitá di carica positiva Q é distribuita su un anello piatto isolante avente raggio interno a e raggio esterno b. La densitá di carica superficiale é data dalla legge $\sigma = C/r^3$, dove r é la distanza dal centro dell'anello di un punto su di esso. Si determini l'espressione del potenziale nel centro dell'anello in funzione della carica totale Q.



Suddividiamo l'area su cui é distribuita la carica in tanti anelli di raggio r e spessore infinitesimo dr.

Come sappiamo dalla teoria, il potenziale di un anello carico con densitá lineare di carica λ nel centro O di esso vale:

$$\Phi(O) = k\lambda 2\pi$$

Utilizziamo questo risultato per il calcolo del potenziale dell'anello di raggio r e spessore dr, tenendo conto che $\lambda = \sigma dr$ essendo σ la densitá superficiale di carica. Per ciascuno di tale anello si ha, allora:

$$d\Phi(O) = k2\pi\sigma dr = k2\pi\frac{C}{r^3}dr$$

Integrando, otteniamo:

$$\Phi(O) = k2\pi C\int_a^b \frac{1}{r^3}dr = k2\pi C\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_a^b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}C\pi\left[-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right] = \frac{C}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

Per esprimere il potenziale in funzione della carica totale Q anziché della costante sconosciuta C, calcoliamo la carica Q.

$$Q = \int_S \sigma da = \int_a^b \frac{C}{r^3}2\pi r dr = 2\pi C\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = 2\pi C\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

da cui:

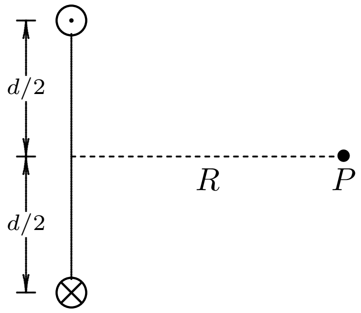
$$C = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

Pertanto il potenziale in O é:

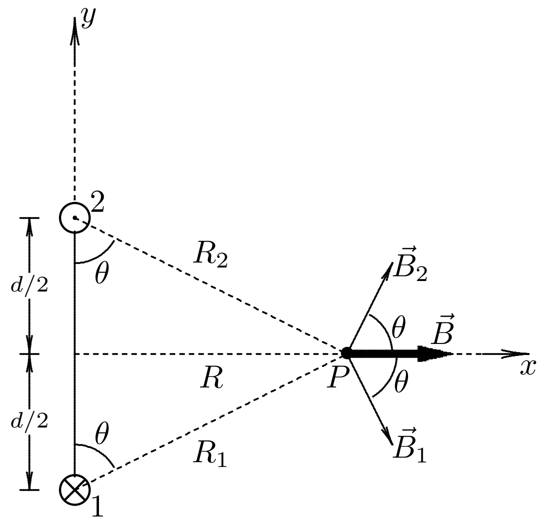
$$\boxed{\Phi(O) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

00-8) Esercizio n. 4 del 23/2/2000

Due lunghi fili posti a distanza d sono percorsi da correnti di eguale intensitá I, dirette in verso opposto, come illustrato in figura.



Calcolare (in modulo, direzione e verso) il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ nel punto P equidistante dai fili.



Per la simmetria del sistema si ha $R_1 = R_2$ e $B_1 = B_2$.

Il campo risultante é diretto lungo l'asse x positivo, in quanto le componenti lungo l'asse y si elidono, e risulta:

$$B = B_2 \cos\theta + B_1 \cos\theta = 2B_2 \cos\theta$$

Ma:

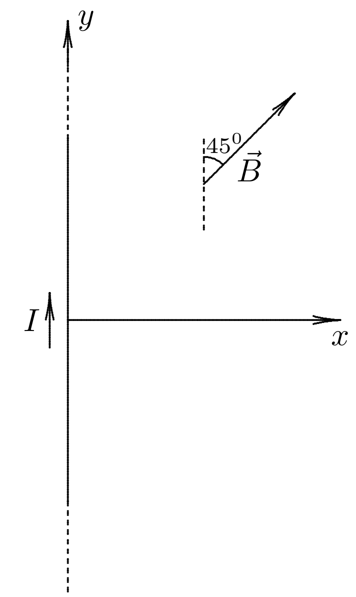
$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R_2}, \qquad \frac{d}{2} = R_2 \cos\theta, \qquad R_2 = \sqrt{\frac{d^2}{4} + R^2}$$

Quindi:

$$B = 2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+R^2}}\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+R^2}} = \underline{\underline{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Id}{R^2+\frac{d^2}{4}}}}$$

00-9) Esercizio n. 1 del 6/5/2000

Un filo percorso da una corrente di intensitá $I = 1\ A$ é immerso in un campo di induzione magnetica uniforme la cui direzione forma un angolo di 45^0 con la direzione del filo. Se $B = 10000\ G$, calcolare la densitá lineare della forza che si esercita sul filo.



Consideriamo il piano xy, con l'asse y coincidente con la direzione del filo. Per la seconda legge di Laplace, si ha:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

ossia:

$$\begin{aligned} d\vec{F} =& Idy\widehat{y} \times [(B\cos 45^0)\widehat{x} + (B\sin 45^0)\widehat{y}] = \\ =& Idy\cos 45^0(\widehat{y} \times \widehat{x}) = -\widehat{z}IdyB\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

essendo:

$$\widehat{y} \times \widehat{x} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\widehat{z}$$

La forza che si esercita sul filo é, quindi, diretta secondo l'asse z negativo.

Risulta, allora:

$$\frac{dF_z}{dy} = -IB\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}\ N/m}}$$

essendo $B = 10000\ G = 1\ Wb/m^2$.

00-10) Esercizio n. 2 del 6/5/2000

Una carica test, $q = 1\ C$, si muove con velocitá $|\vec{v}| = 1\ m/s$. Su di essa agiscono le seguenti forze:

a) $\vec{F} = 3\widehat{x} - \widehat{y} + 2\widehat{z}$ quando $\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{x}$; b) $\vec{F} = 2\widehat{x} - 2\widehat{y} - \widehat{z}$ quando $\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{y}$; c) $\vec{F} = 2\widehat{x} + \widehat{z}$ quando $\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{z}$.

Calcolare i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che causano queste forze.

Una particella carica in moto sottoposta ad un campo elettrico e ad un campo di induzione magnetica subisce la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

che in componenti cartesiane si scrive:

$$\begin{cases} F_x = qE_x + v_y B_z - v_z B_y \\ F_y = qE_y + v_z B_x - v_x B_z \\ F_z = qE_z + v_x B_y - v_y B_x \end{cases}$$

essendo:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \widehat{x}(v_y B_z - v_z B_y) + \widehat{y}(v_z B_x - v_x B_z) + \widehat{z}(v_x B_y - v_y B_x)$$

a) $\underline{\underline{\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{x}}}$

Le componenti della forza sono:

$$\begin{cases} F_x = qE_x \\ F_y = qE_y - |\vec{v}|B_z \\ F_z = qE_z + |\vec{v}|B_y \end{cases}$$

Confrontando i secondi membri con il secondo membro della formula della forza, competente al caso a), data dal problema, si ha:

$$\begin{cases} qE_x = 3 \\ qE_y - |\vec{v}|B_z = -1 \\ qE_z + |\vec{v}|B_y = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

b) $\underline{\underline{\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{y}}}$

Le componenti della forza sono:

$$\begin{cases} F_x = qE_x + |\vec{v}|B_z \\ F_y = qE_y \\ F_z = qE_z - |\vec{v}|B_x \end{cases}$$

Confrontando i secondi membri con il secondo membro della formula della forza, competente al caso b), data dal problema, si ha:

$$\begin{cases} qE_x + |\vec{v}|B_z = 2 \\ qE_y = -2 \\ qE_z - |\vec{v}|B_x = -1 \end{cases} \qquad (2)$$

c) $\underline{\underline{\vec{v} = |\vec{v}|\widehat{z}}}$

Le componenti della forza sono:

$$\begin{cases} F_x = qE_x - |\vec{v}|B_y \\ F_y = qE_y + |\vec{v}|B_x \\ F_z = qE_z \end{cases}$$

Confrontando i secondi membri con il secondo membro della formula della forza, competente al caso c), data dal problema, si ha:

$$\begin{cases} qE_x - |\vec{v}|B_y = 2 \\ qE_y + |\vec{v}|B_x = 0 \\ qE_z = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Dai sistemi (1), (2) e (3) si ricavano le componenti del campo elettrico e del campo di induzione magnetica; dalla terza equazione di ciascun sistema si ha:

$$E_x = \frac{3}{q}, \qquad E_y = -\frac{2}{q}, \qquad E_z = \frac{1}{q}$$

Dalle prime due equazioni del sistema (3) si ha:

$$B_x = \frac{2}{|\vec{v}|}, \qquad B_y = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

Dalla prima equazione del sistema (2) si ha:

$$B_z = -\frac{1}{|\vec{v}|}$$

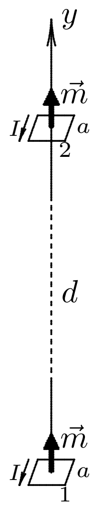
Quindi i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che causano le forze che agiscono sulla particella carica sono:

$$\begin{cases} \vec{E} = 3\widehat{x} - 2\widehat{y} + \widehat{z} \\ \vec{B} = 2\widehat{x} + \widehat{y} - \widehat{z} \end{cases}$$

Si prova immediatamente che tali componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ soddisfano a tutte le equazioni dei sistemi (1), (2) e (3).

00-11) Esercizio n. 3 del 6/5/2000

Due spire quadrate di lato a sono percorse dalla stessa intensitá di corrente I. Esse sono parallele e la retta congiungente i loro centri é perpendicolare ai piani contenenti le spire. Se la distanza fra i centri é $d >> a$, calcolare la forza (in modulo, direzione e verso) che si esercita fra le spire nel caso in cui le correnti abbiano lo stesso verso e nel caso in cui abbiano verso opposto.



Con la scelta dei versi delle correnti come in figura (verso antiorario) i momenti magnetici delle due spire sono orientati secondo l'asse y (che coincide con l'asse delle spire) positivo.

Poiché $d >> a$ possiamo supporre che l'interazione fra le due spire sia dipolare.

La forza che si esercita sulla spira 2 dovuta al campo di induzione magnetica generato dalla spira 1 é:

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{12})$$

Il campo B_{12} generato dalla spira 1, il cui centro é l'origine delle coordinate, é:

$$\vec{B}_{12}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1}{r^3}\right]$$

Poiché $\vec{m}_1 = Ia^2\widehat{y}$ e $\vec{r} = y\widehat{y}$, si ha:

$$\vec{B}_{12}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3Ia^2}{y^3}\widehat{y} - \frac{Ia^2}{y^3}\widehat{y}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2Ia^2}{y^3}\widehat{y}$$

Quindi, poiché $\vec{m}_2 = \vec{m}_1 = Ia^2\widehat{y}$, risulta:

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}\left(Ia^2\widehat{y} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2Ia^2}{y^3}\widehat{y}\right) = \widehat{y}2I^2a^4\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}I^2a^4\widehat{y}\left(\frac{-3y^2}{y^6}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi}3I^2a^4\frac{1}{y^4}\widehat{y}$$

Allora per $y = d$ la forza esercitata dalla spira 1 sulla spira 2 é:

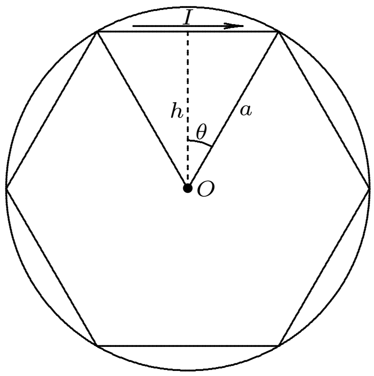
$$F_{y12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} 3I^2 a^4 \frac{1}{d^4}$$

Se la corrente nella spira 2 circola in verso orario (ossia le due correnti non sono equiversi) si ha $\vec{m}_2 = -Ia^2\widehat{y}$ e quindi per $y = d$ la forza esercitata dalla spira 1 sulla spira 2 é:

$$F_{y12} = \frac{\mu_0}{2\pi} 3I^2 a^4 \frac{1}{d^4}$$

00-12) Esercizio n. 4 del 6/5/2000

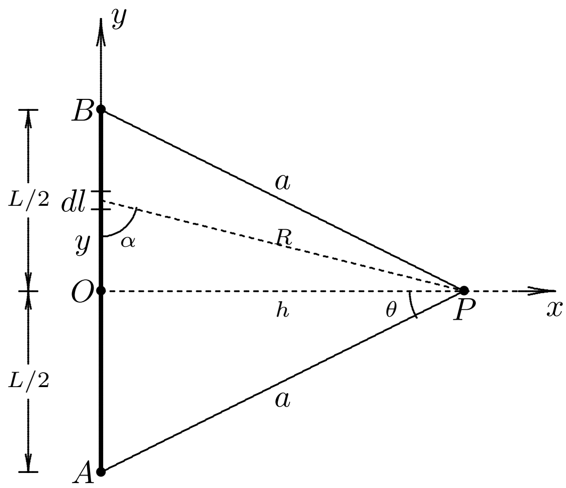
Un circuito percorso da corrente di intensitá I ha la forma di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio a. Calcolare il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ al centro del poligono.



Il poligono regolare inscritto in una circonferenza ha n lati eguali. In figura, per comoditá, é stato riportato un esagono regolare ma é immediato comprendere che il procedimento é del tutto generale. Consideriamo un generico lato del poligono regolare inscritto.

Il campo di induzione magnetica generato da esso nel centro del poligono é, dato il verso da noi scelto per la corrente, orientato in direzione ortogonale al piano del poligono nel verso entrante al piano stesso.

Il problema consiste, quindi, nel calcolare il modulo del campo di induzione magnetica generato sui punti dell'asse di un segmento lungo L.



Per la prima legge di Laplace, si ha:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Considerando un sistema di riferimento con l'asse y nella direzione del filo, si ha:

$$d\vec{l} = dy\widehat{y}, \qquad \vec{r}\,' = y\widehat{y}, \qquad \vec{r} = h\widehat{x}, \qquad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{y^2 + h^2}$$

Pertanto il modulo di $d\vec{B}$ generato dall'elemento infinitesimo $d\vec{l}$ é:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I |dy| \frac{\sin\alpha}{R^2}$$

D'altra parte si ha:

$$y = h\cot\alpha \Longrightarrow |dy| = h\frac{1}{\sin^2\alpha} d\alpha \text{ e R} = \frac{\text{h}}{\sin\alpha}$$

Pertanto:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin\alpha}{h} d\alpha$$

ossia:

$$B = \left| 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{h}\int_0^{L/2a} d\cos\alpha \right| = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{h}\frac{L}{2a} = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{h}\frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$$

Per un poligono regolare di n lati:

$$B_{(pol.\ reg.)} = \frac{\mu_0}{2\pi} n \frac{I}{ha}\sqrt{a^2 - h^2}$$

Ma $h = a\cos\theta$ e poiché in un poligono regolare $2\theta = \dfrac{360^0}{n}$ ossia $\theta = \dfrac{180^0}{n}$, si ha:

$$B_{(pol.\ reg.)} = \frac{\mu_0}{2\pi} n \frac{I}{a^2\cos\left(\dfrac{180^0}{n}\right)}\sqrt{a^2\left(1 - \cos^2\left(\frac{180^0}{n}\right)\right)} = \frac{\mu_0}{2\pi} n \frac{I}{a}\tan\left(\frac{180^0}{n}\right)$$

Il valore del campo di induzione magnetica generato da un segmento in un generico punto del proprio asse, si puó ottenere dal risultato dell'esercizio n.3 del 21/11/98 ponendo $\alpha_1 = \alpha_2$; si puó ottenere anche dell'esercizio n.1 del 21/7/98 ponendo $x = h$ e $y = L/2$, nonché dall'esercizio n.4 del 26/2/94.

00-13) Esercizio n. 1 del 26/6/2000

Un palloncino sferico di raggio $a = 5\ cm$ é superficialmente carico con densitá uniforme di carica $\sigma = 1\ \mu C/m^2$. Se si dilata il palloncino finché il suo raggio diventi $b = 7\ cm$, calcolare la variazione dell'energia potenziale elettrostatica.

L'energia potenziale elettrostatica di una sfera superficialmente carica é:

$$W = \frac{1}{2} k \frac{Q^2}{R}$$

essendo R il raggio della sfera e Q la quantitá totale di carica su di essa depositata. Si ha:

$$Q = \oint_{S(sfera)} \sigma d^2 r = \sigma 4\pi R^2$$

in quanto nel nostro caso la carica é uniformemente distribuita sulla superficie della sfera, ossia $\sigma = costante$.

Per $R = a = 5\ cm$, risulta:

$$Q_{(R=a)} = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = \pi \cdot 10^{-8}\ C$$

e:

$$W_{(R=a)} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi^2 \cdot 10^{-16}}{25 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \pi 10^{-14} = \underline{\underline{1.77 \cdot 10^{-3}\ J}}$$

Quando il palloncino viene dilatato, la carica depositata sulla superficie resta la stessa per il principio di conservazione della carica elettrica; quindi:

$$Q_{(R=b)} = \pi \cdot 10^{-8}\ C$$

Ne segue:

$$W_{(R=b)} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi^2 \cdot 10^{-16}}{49 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\pi 10^{-12}}{196} = \underline{\underline{9.05 \cdot 10^{-4}\ J}}$$

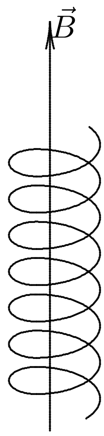
La variazione dell'energia potenziale del palloncino é, quindi:

$$W_{(R=b)} - W_{(R=a)} = \underline{\underline{-8.65 \cdot 10^{-4}\ J}}$$

00-14) Esercizio n. 2 del 26/6/2000

Una particella di carica q, di massa m e di velocitá $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$, penetra in un campo di induzione magnetica $\vec{B} \equiv (0, 0, B_z)$. Calcolare: a) il raggio del moto circolare sul piano perpendicolare alla direzione del campo; b) il passo dell'elica; c) il tempo necessario perché la particella percorra una lunghezza L in direzione del campo. I dati numerici sono: $q = +1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$, $v_x = v_y = 2 \cdot 10^6\ m/s$, $v_z = 3 \cdot 10^6\ m/s$, $B_z = 1000$ G, $L = 1\ Km$.

La traiettoria di una particella carica in moto in un campo di induzione magnetica uniforme é un'elica che si avvolge lungo la direzione del campo.



Il raggio del moto circolare sul piano perpendicolare alla direzione del campo é:

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} = \frac{m v_{0\perp}}{qB}$$

Assumendo l'asse z di un sistema di riferimento coincidente con la direzione del campo, si ha $v_{0\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2.83 \cdot 10^6\ m/s$.

Poiché:

$$m = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg, \qquad q = 1.6 \cdot 10^{-19}, \qquad B = 0.1\ Wb/m^2$$

segue:

$$R = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 2.83 \cdot 10^6}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1} = \underline{\underline{0.295\ m}}$$

Il passo dell'elica é:

$$p = v_{0z} T = V_{0z} \frac{2\pi m}{qB} = 3 \cdot 10^6 \frac{2\pi \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1} = \underline{\underline{1.967\ m}}$$

Poiché il passo p é la lunghezza percorsa dalla particella lungo la direzione del campo in un tempo T, si ha:

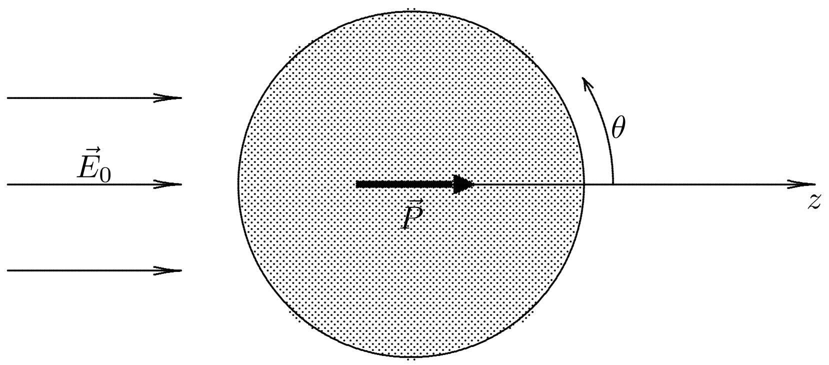
$$p : T = L : t$$

da cui:

$$t = L\frac{T}{p} = \frac{L}{v_{0z}} = \frac{1000}{3 \cdot 10^6} = \underline{\underline{3.33 \cdot 10^{-4}}}\ s$$

00-15) Esercizio n. 3 del 26/6/2000

Una goccia (sferica) d'acqua é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E_0 = 1000\ V/m$. Calcolare la densitá della carica di polarizzazione sulla superficie della goccia.



Il campo elettrico all'interno di una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme é pure uniforme nella stessa direzione e verso del campo elettrico esterno iniziale. Si ha:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$$

Conseguentemente la sfera si polarizza e la polarizzazione $\vec{P}$ é:

$$\vec{P} = \chi\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$$

La densitá di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera é:

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta = 3\epsilon_0\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}E_0\cos\theta$$

Quindi la carica di polarizzazione é positiva sulla semisfera che si affaccia sull'asse z positivo e negativa sull'altra.

Poiché per l'acqua $\epsilon_r = 81$, si ha:

$$\underline{\underline{\sigma_P = 2.56\cdot 10^{-8}\cos\theta}}$$

00-16) Esercizio n. 4 del 26/6/2000

Un sottile solenoide lungo $L = 20\ cm$ é costituito da $N = 100$ spire percorse da una corrente di intensitá $I = 10\ A$. Calcolare il campo di induzione magnetica massimo sull'asse del solenoide e quello corrispondente al punto dell'asse che si trova sul piano contenente l'orlo del solenoide.

Il modulo del campo di induzione magnetica generato da un solenoide sui punti dell'asse, che facciamo coincidere con l'asse z di un sistema di riferimento, é:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} nI \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{a\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2}{a^2}}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{a\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2}{a^2}}} \right]$$

essendo a il raggio del solenoide e $n = \frac{N}{L}$ il numero di spire per unitá di lunghezza.

Il valore massimo di B_z si ha per $z = 0$ e vale:

$$(B_z)_{max} = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{2\frac{L}{2}}{a\sqrt{1 + \frac{L^2}{4a^2}}} = \mu_0 nI \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

Se il solenoide é sottile, come indicato nel testo, il suo diametro é molto piccolo rispetto alla lunghezza del solenoide, ossia:

$$2a << L \Longrightarrow a << \frac{L}{2}$$

Con tale approssimazione, risulta:

$$(B_z)_{max} \simeq \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{L} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{100}{20 \cdot 10^{-2}} 10 = 6.28 \cdot 10^{-3}\ Wb/m^2 = \underline{\underline{62.8\ Gauss}}$$

Il punto dell'asse che si trova sul piano contenente l'orlo del solenoide ha la coordinata $z = \frac{L}{2}$; pertanto il campo in tale punto é:

$$(B_z)_{orlo} = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

Nell'approssimazione di solenoide sottile, si ha:

$$(B_z)_{orlo} \simeq \frac{\mu_0}{2} nI = \underline{\underline{31.4\ Gauss}}$$

00-17) Esercizio n. 1 del 21/7/2000

Un magnetoplasma é costituito da N elettroni liberi per unitá di volume ed é sottoposto ad un campo di induzione magnetica costante $\vec{B}$. Gli elettroni sono in moto termico alla temperatura T, cosicché la componente della velocitá ortogonale al campo magnetico é data dalla: $\frac{1}{2}m_e v^2 = KT$, dove K é la costante di Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}\ J/^0C$). Esprimere il raggio dell'orbita elettronica. Valutare, altresí, la corrente media nell'orbita nonché il momento magnetico dell'orbita.

Una particella carica (per esempio un elettrone) in moto in un campo magnetico uniforme descrive, in generale un'elica che si avvolge nella direzione del campo.

Il raggio del moto circolare sul piano perpendicolare alla direzione del campo é:

$$R = \frac{m_e v_{0\perp}}{qB}$$

Nel nostro caso:

$$v_{0\perp} = v = \sqrt{\frac{2KT}{m_e}}$$

Quindi:

$$R = \frac{m_e}{qB}\sqrt{\frac{2KT}{m_e}} = \sqrt{\frac{2KTm_e}{q^2B^2}}$$

La corrente media nell'orbita é:

$$i_m = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} \frac{dq}{dt}dt$$

essendo T_e il periodo di percorrenza dell'orbita da parte dell'elettrone. ossia:

$$T_e = 2\pi\frac{m_e}{qB}$$

Quindi:

$$i_m = \frac{1}{T_e}q = \frac{q^2B}{2\pi m_e}$$

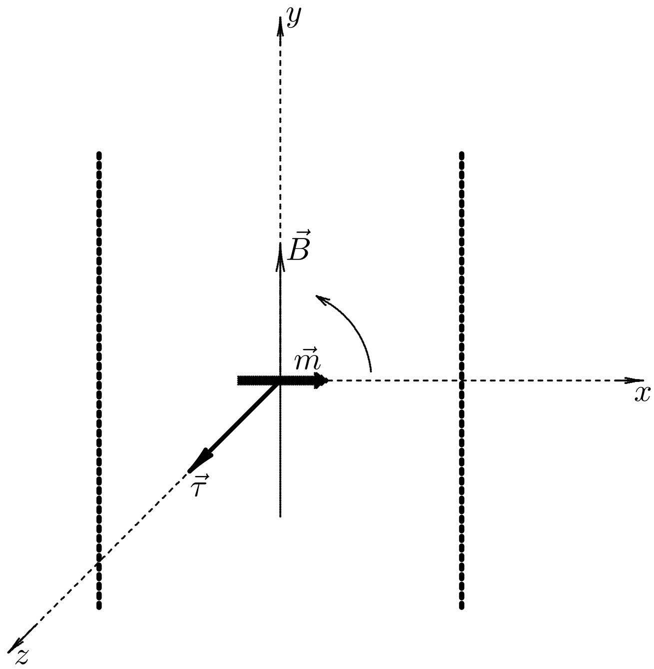
Il momento magnetico dell'orbita é, in modulo:

$$m = IA = i_m\pi R^2 = \frac{q^2B}{2\pi m_e}\pi\frac{2KTm_e}{q^2B^2} = \underline{\underline{\frac{KT}{B}}}$$

00-18) Esercizio n. 2 del 21/7/2000

Una piccola calamita di momento magnetico $\vec{m}$ puó ruotare in un piano longitudinale dentro un lungo solenoide di n spire per unitá di lunghezza. Se $m = 80000\ A \cdot m^2$, $n = 500$ $spire/m$ e $i = 10\ A$, valutare (in modulo direzione e verso) il momento meccanico massimo a cui é sottoposto l'aghetto.

In figura é rappresentata la sezione longitudinale di un solenoide. Sia $\vec{B}$ il vettore induzione magnetica da esso generato che agisce su una piccola calamita di momento magnetico $\vec{m}$ che puó ruotare su tale piano.



Poiché il solenoide é lungo, si puó ritenere che il campo $\vec{B}$ sia uniforme nel suo interno; pertanto il momento meccanico che agisce sulla calamita é:

$$\tau = \vec{m} \times \vec{B}$$

Consideriamo un sistema di riferimento con l'asse y orientato in direzione e verso come $\vec{B}$. Conseguentemente le uniche componenti di $\vec{m}$ sono m_x e m_y. Si ha allora:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ m_x & m_y & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \widehat{z} m_x B$$

Se m_x é positivo il momento τ é diretto lungo l'asse z positivo, altrimenti é diretto lungo l'asse z negativo. Inoltre se m_y é positivo l'aghetto si orienta parallelamente a $\vec{B}$; se m_y é negativo l'aghetto si orienta antiparallelamente a $\vec{B}$.

Il modulo massimo si ha quando l'aghetto si trova nella direzione che forma un angolo di 90^0 con la direzione del campo come é indicato in figura. Esso é:

$$\tau = mB$$

Per un solenoide lungo, si ha:

$$B \simeq \mu_0 ni$$

Quindi:

$$\tau = \mu_0 mni = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80000 \cdot 500 \cdot 10 = \underline{\underline{502.64\ N \cdot m}}$$

00-19) Esercizio n. 3 del 21/7/2000

Una sfera conduttrice di raggio $a = 1\ cm$ é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 1000\ V/m$. Sia $Q = 1\ C$ la carica iniziale posta sulla superficie della sfera. Esprimere la funzione potenziale completa del sistema. Valutare il momento di dipolo della sfera indotto dal campo elettrico.

Nel caso generale di una sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme, la funzione potenziale é:

$$\Phi_{ext}(r,\theta) = U_0 - \frac{C_1}{a} + \frac{C_1}{r} - E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{1}{r^2}\cos\theta$$
$$\Phi_{int}(r,\theta) = U_0$$

Se la sfera é inizialmente scarica $C_1 = 0$; se la sfera possiede una carica iniziale Q, si ha:

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9\cdot 10^9$$

Pertanto la funzione potenziale completa del sistema é:

$$\Phi_{ext}(r,\theta) = U_0 - 9\cdot 10^{11} + \frac{9\cdot 10^9}{r} - 10^3 r\cos\theta + 10^{-3}\frac{\cos\theta}{r^2}$$
$$\Phi_{int}(r,\theta) = U_0$$

Il momento di dipolo della sfera si calcola imponendo l'eguaglianza fra l'espressione generale del potenziale di dipolo ed il termine dipolare della funzione $\Phi_{ext}(r,\theta)$:

$$k\frac{p\cos\theta}{r^2} = 10^{-3}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

da cui:

$$p = 4\pi\epsilon_0\cdot 10^{-3} = \underline{\underline{1.11\cdot 10^{-13}\ C\cdot m}}$$

00-20) Esercizio n. 4 del 21/7/2000

Determinare le espressioni delle componenti del campo elettrico totale competente al problema precedente.

Le componenti del campo elettrico relativo al problema precedente sono:

$$
\begin{aligned}
E_{r\,ext} &= -\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} = \frac{9 \cdot 10^9}{r^2} + 10^3 \left(1 + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r^3}\right) \cos\theta \\
E_{\theta\,ext} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial \theta} = -10^3 \left(1 - \frac{\cdot 10^{-6}}{r^3}\right) \sin\theta \\
\vec{E}_{int} &= 0
\end{aligned}
$$

00-21) Esercizio n. 1 del 15/9/2000

Si consideri un disco circolare uniformemente carico, di densitá superficiale di carica σ. Si dimostri, analiticamente, che il potenziale del disco si annulla all'infinito con legge $\frac{1}{r}$.

Il potenziale elettrostatico di un disco carico sui punti dell'asse é:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + D^2} - |D|\right] \tag{1}$$

essendo $|D|$ il valore assoluto della coordinata del generico punto P sull'asse del disco e R il raggio del disco.

Per $D > 0$ la (1) si scrive:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + D^2} - D\right] \tag{2}$$

Per provare che il potenziale elettrostatico converge con legge $\frac{1}{D}$ per D che tende all'infinito, scriviamo la (2) nella seguente maniera:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[D\sqrt{1 + \frac{R^2}{D^2}} - D\right] \tag{3}$$

Per $D >> R$ si puó porre:

$$\sqrt{1 + \frac{R^2}{D^2}} \simeq 1 + \frac{R^2}{2D^2}$$

Quindi, per punti dell'asse la cui coordinata D é molto grande rispetto al raggio del disco, si ha:

$$\Phi(P)_{(D>>R)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[D\left(1 + \frac{R^2}{2D^2}\right) - D\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{2D}$$

il che prova l'andamento del potenziale con legge $\frac{1}{D}$ per $D >> R$. É ovvio che:

$$\lim_{D\to\infty} \Phi(P) = 0$$

00-22) Esercizio n. 2 del 15/9/2000

Si valuti esplicitamente l'espressione:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

essendo:

$$\vec{r} = x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z} \qquad e \qquad \vec{r}\,' = x\,'\widehat{x} + y\,'\widehat{y} + z\,'\widehat{z}$$

Si ha:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \nabla^2 \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right]\end{aligned}$$

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right] = \frac{-(x-x\,')}{[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2]^{3/2}}$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right] =$$

$$= \frac{-\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right]^{\frac{3}{2}} + 3(x-x\,')^2\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right]^3} =$$

$$= \frac{-\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right] + 3(x-x\,')^2}{\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{2(x-x\,')^2-(y-y\,')^2-(z-z\,')^2}{\left[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right]=\frac{-(x-x\,')^2+2(y-y\,')^2-(z-z\,')^2}{[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2}}\right]=\frac{-(x-x\,')^2-(y-y\,')^2+2(z-z\,')^2}{[(x-x\,')^2+(y-y\,')^2+(z-z\,')^2]^{\frac{5}{2}}}$$

Ne segue immediatamente che:

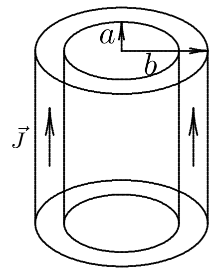
$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=0 \quad per \quad \vec{r}\neq\vec{r}\,'$$

Per $\vec{r}=\vec{r}\,'$ la funzione $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ non é definita e quindi l'operazione non ha significato.

00-23) Esercizio n. 3 del 15/9/2000

In un conduttore cilindrico cavo indefinito, di raggio interno a ed esterno b, scorre una corrente, lungo la direzione assiale, distribuita con densitá uniforme $\vec{J}$ sulla sezione del conduttore. Calcolare il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio.

(vedi es. n.4 del 30/1/1998)



Applichiamo il teorema di Ampere assumendo come percorso una circonferenza C con il centro sull'asse del tubo e giacente in un piano perpendicolare ad esso. Il raggio di tale circonferenza sia r.

Si ha:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

1) $\underline{r < a}$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Poiché per simmetria $\vec{H}$ é tangente punto per punto a $d\vec{l}$ e dipende solo da r si ha:

$$H \oint_c dl = 0 \qquad \text{ossia} \qquad H = B = 0$$

2) $a < r < b$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = J(\pi r^2 - \pi a^2)$$

Poiché per simmetria $\vec{H}$ é tangente punto per punto a $d\vec{l}$ e dipende solo da r si ha:

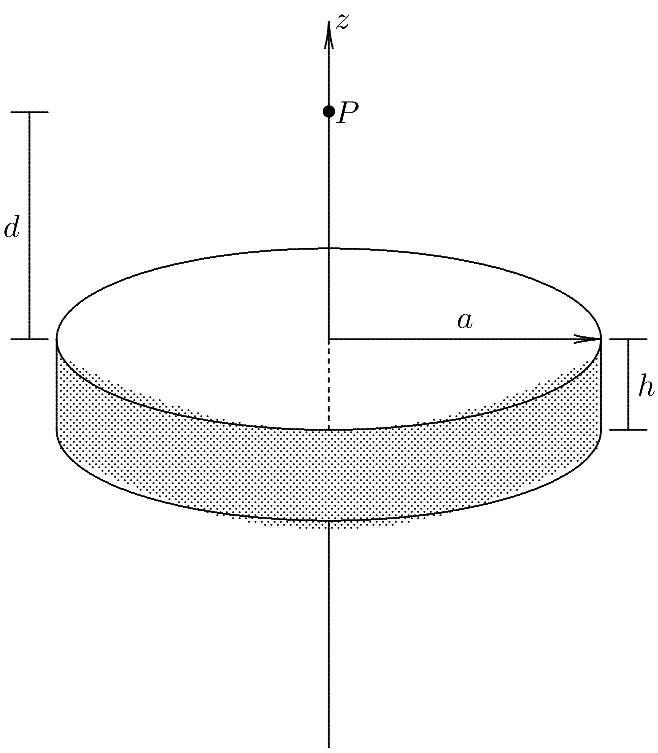
$$H 2\pi r = J\pi(r^2 - a^2) \Longrightarrow H = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} \Longrightarrow B = \mu_0\mu_r \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\frac{I(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)}$$

2) $r > b$

$$H 2\pi r = I \longrightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \Longrightarrow B = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\frac{I}{r}$$

00-24) Esercizio n. 4 del 15/9/2000

Una calamita a forma di cilindro circolare di altezza $h = 0.3\ cm$ e diametro $D = 3\ cm$, é magnetizzata uniformemente lungo l'asse. Se il modulo del vettore magnetizzazione é $M = 0.9 \cdot 10^6\ A/m$, calcolare il modulo del campo di induzione magnetica nel punto P situato sull'asse della calamita alle distanze, da una delle basi, $d = 1\ cm$ e $d = 3\ cm$.



Sia $a = \dfrac{D}{2}$ il raggio del cilindro.

Consideriamo la calamita come un solenoide in cui $nI = M$; applichiamo la formula del campo B sull'asse del solenoide:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{\dfrac{h}{2} - z}{a\sqrt{1 + \dfrac{\left(\dfrac{h}{2} - z\right)^2}{a^2}}} + \frac{\dfrac{h}{2} + z}{a\sqrt{1 + \dfrac{\left(\dfrac{h}{2} + z\right)^2}{a^2}}} \right]$$

Poniamo $z = \dfrac{h}{2} + d$, essendo d la distanza del punto P da una delle basi della calamita (per esempio dalla base superiore come in figura). Si ha, allora:

$$B_{z\left(z=\frac{h}{2}+d\right)} = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{-d}{a\sqrt{1+\frac{d^2}{a^2}}} + \frac{h+d}{a\sqrt{1+\frac{(h+d)^2}{a^2}}} \right]$$

Per $d = 1\ cm$, si ha:

$$B_{z(d=1)} = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{-1}{1.5\sqrt{1+\frac{1}{(1.5)^2}}} + \frac{1.3}{1.5\sqrt{1+\frac{(1.3)^2}{(1.5)^2}}} \right] = \frac{\mu_0}{2} M\,(-0.5547 + 0.6549) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} M \cdot 0.1002 = 0.0567\ Wb/m^2 = \underline{\underline{567\ Gauss}}$$

Per $d = 3\ cm$, si ha:

$$B_{z(d=3)} = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{-3}{1.5\sqrt{1+\frac{9}{(1.5)^2}}} + \frac{3.3}{1.5\sqrt{1+\frac{(3.3)^2}{(1.5)^2}}} \right] = \frac{\mu_0}{2} M\,(-0.8944 + 0.9103) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} M \cdot 0.0159 = 0.0090\ Wb/m^2 = \underline{\underline{90\ Gauss}}$$

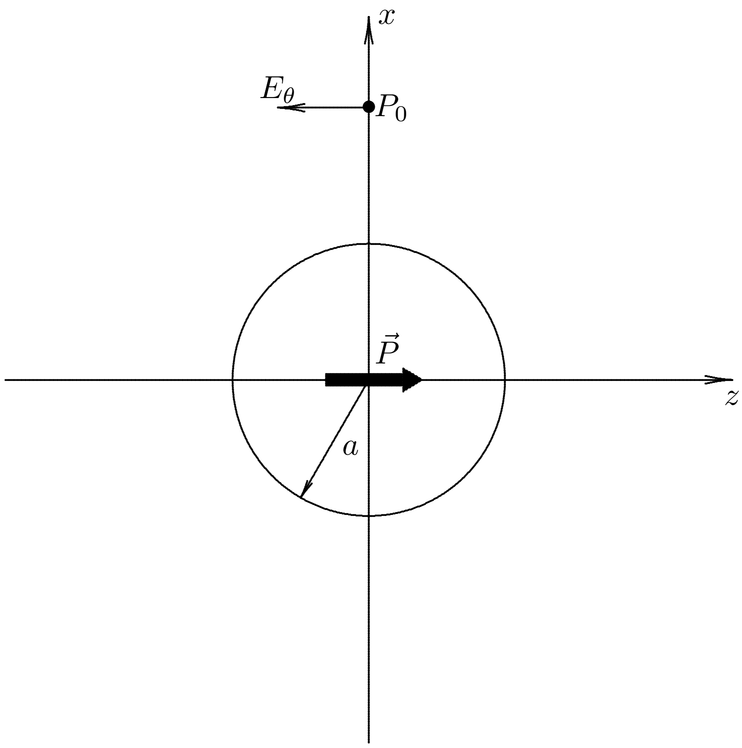
A titolo di completezza valutiamo il campo di induzione magnetica nel centro della calamita ossia per $z = 0$.

$$B_{z(z=0)} = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{\frac{h}{2}}{a\sqrt{1+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{a^2}}} + \frac{\frac{h}{2}}{a\sqrt{1+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{a^2}}} \right] = \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{h}{a\sqrt{1+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{a^2}}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} M \left[\frac{0.3}{1.5\sqrt{1+\frac{(0.15)^2}{(1.5)^2}}} \right] = \frac{\mu_0}{2} M \cdot 0.199 = 0.1125\ Wb/m^2 = \underline{\underline{1125\ Gauss}}$$

00-25) Esercizio n. 1 del 4/10/2000

Sia data una sferetta dielettrica, di raggio $a = 1\ cm$, polarizzata elettricamente con il vettore polarizzazione $\vec{P}$ uniforme orientato verso l'asse $\vec{z}$ positivo e di modulo $|\vec{P}| = 10^{-7}$ C/m^2. Si calcoli in modulo, direzione e verso il campo elettrico nel punto $P_0 \equiv (x_0, 0, 0)$ quando $x_0 = 2\ cm$.



Dalla teoria sappiamo che il potenziale generato dalla sfera nei punti esterni é:

$$\Phi_{ext} = \frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \frac{1}{r^2} \cos\theta$$

Quindi il campo elettrico nei punti esterni alla sfera é:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi_{ext} = -\frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta\right) = \\ &= -\frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \widehat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta\right) - \frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \widehat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta\right) = \\ &= \frac{2P}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^3}\widehat{e}_r \cos\theta + \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^3}\widehat{e}_\theta \sin\theta\end{aligned}$$

Il campo elettrico esterno é, quindi, un campo di dipolo elettrico.

Sui punti dell'asse x risulta $\theta = \frac{\pi}{2}$; pertanto sull'asse x risulta:

$$E_r = 0 \qquad\qquad e \qquad\qquad E_\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^3}$$

In coordinate cartesiane, si ha:

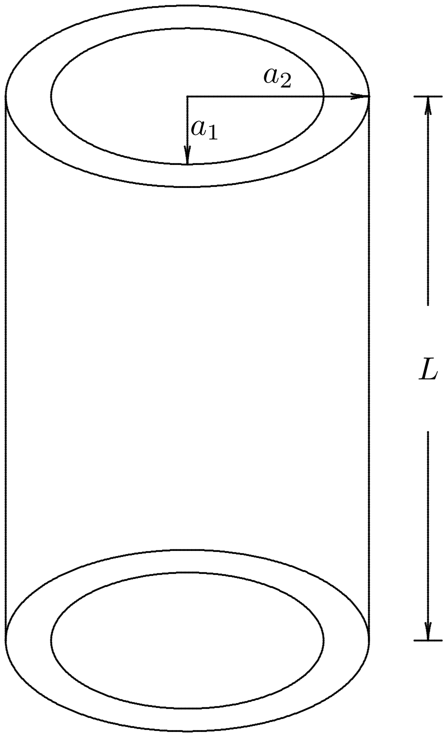
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ \\ E_y = 0 \\ \\ E_z = -\dfrac{P}{3\epsilon_0}\dfrac{a^3}{r^3} \end{cases}$$

Per $r = 2\ cm = 2a$, si ha:

$$E_z = -\frac{10^{-7}}{3 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 8} = \underline{\underline{-470.59\ V/m}}$$

00-26) Esercizio n. 2 del 4/10/2000

Un condensatore cilindrico lungo 1 m ha il diametro del conduttore interno $d_1 = 2\ cm$ e quello del conduttore esterno $d_2 = 4\ cm$. Se la costante dielettrica del mezzo compreso fra i conduttori é $\epsilon_r = 4$ e se la differenza di potenziale applicata fra i due conduttori é $\Delta V = 1000\ V$, calcolare: a) la capacitá del condensatore; b) l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel condensatore e c) la densitá superficiale di forza che si esercita sulla superficie del conduttore interno.



Sia:

$$a_1 = \frac{d_1}{2} = 1\ cm, \quad a_2 = \frac{d_2}{2} = 2\ cm, \quad \epsilon_r = 4, \quad L = 1\ m \quad e \quad \Delta V = 1000\ V$$

Il condensatore cilindrico é trattato in teoria (vedi Appunti di Fisica II).
La capacitá del condensatore é:

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{L}{\ln \dfrac{a_2}{a_1}} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{0.6931} = 3.21 \cdot 10^{-10} = \underline{\underline{321\ pF}}$$

L'energia elettrostatica immagazzinata all'interno del condensatore é:

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \underline{\underline{1.6 \cdot 10^{-4}\ J}}$$

La densitá superficiale di forza sulla superficie dell'armatura interna é:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{int}^2}{\epsilon}\widehat{n}$$

D'altra parte:

$$\sigma_{int} = \epsilon\frac{\Delta V}{a_1 \ln\frac{a_2}{a_1}}$$

Conseguentemente:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2}\epsilon\frac{(\Delta V)^2}{a_1^2\left(\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\widehat{n}$$

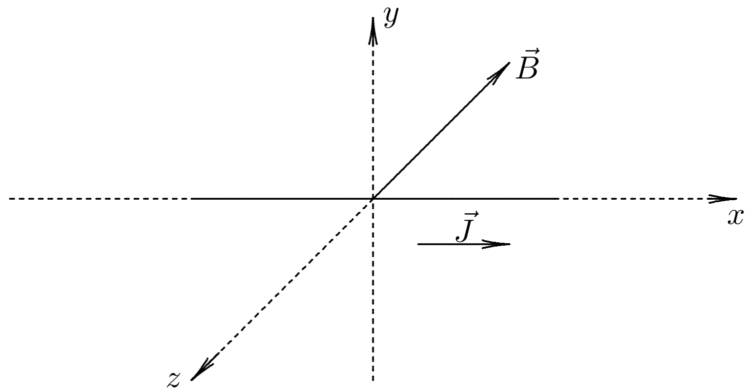
Quindi:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \underline{\underline{3.68 \cdot 10^{-5}\ N/m^2}}$$

00-27) Esercizio n. 3 del 4/10/2000

Un lungo filo di rame, disposto orizzontalmente, é percorso da una densitá di corrente il cui modulo é $J = 3\ A/mm^2$.

Esso é posto in un campo di induzione magnetica uniforme perpendicolare al filo. La direzione ed il verso del campo applicato, compatibilmente con il verso di $\vec{J}$, é tale che la forza magnetica agente sul filo risulti diretta verticalmente verso l'alto. Calcolare il modulo del campo affinché la forza che agisce sul filo compensi la forza di gravitá. La densitá del rame é $8.96\ g/cm^3$.



Sia il filo disposto lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano. Sia $\vec{J}$ il vettore densitá di corrente diretto lungo l'asse x positivo e sia I l'intensitá di corrente.

Per la seconda legge di Laplace, su ciascun elemento di filo agisce la forza:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

essendo $d\vec{l}$ un elemento infinitesimo di filo orientato secondo la direzione e il verso del vettore densitá di corrente.

Si ha:

$$d\vec{F}_m = I \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = -I\widehat{y}dxB_z + I\widehat{z}dxB_y$$

Affinché l'elemento di forza risulti diretto verso l'alto ossia verso l'asse y positivo occorre che:

$$B_y = 0 \qquad e \qquad \vec{B} = -\left|\vec{B}\right|\widehat{z}$$

Quindi sull'elemento di filo agisce la forza magnetica:

$$d\vec{F}_m = I\left|B\right|dx\widehat{y} = JS\left|\vec{B}\right|dx\widehat{y}$$

essendo S l'area della sezione trasversale del filo.

La forza di gravitá che agisce sull'elemento di filo é:

$$d\vec{F}_g = -gdm\widehat{y}$$

essendo dm la massa infinitesima dell'elemento di filo.

Si ha:

$$dm = \delta dV$$

essendo δ la densitá del materiale di cui é costituito il filo e dV l'elemento infinitesimo di volume del filo che vale $dV = Sdx$.

Quindi:

$$d\vec{F}_g = -g\delta Sdx\widehat{y}$$

Per l'equilibrio, deve essere:

$$|d\vec{F}_m| = |d\vec{F}_g|$$

ossia:

$$JS\left|\vec{B}\right|dx = g\delta Sdx \Longrightarrow |\vec{B}| = \frac{g\delta}{J}$$

Si ha:

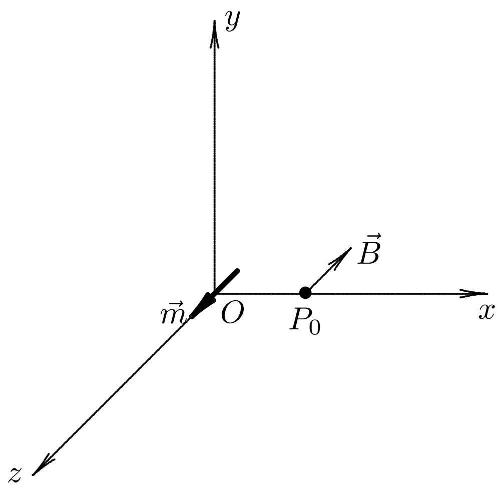
$$\delta = 8.96\ g/cm^3 = 8.96 \cdot 10^3\ kg/m^3, \quad g = 9.8\ m/s^2 \quad e \quad J = 3 \cdot 10^6\ A/m^2$$

Ne segue:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{9.8 \cdot 8.96}{3 \cdot 10^3} = 2.93 \cdot 10^{-2}\ Wb/m^2 = \underline{\underline{293\ Gauss}}$$

00-28) Esercizio n. 4 del 4/10/2000

Una piccola sfera di ferro magnetizzata posta nell'origine delle coordinate genera nel punto $P \equiv (0,0,5)$ un campo di induzione magnetica di componenti: $B_x = B_y = 0$, $B_z = 1$ G. Calcolare il modulo e la direzione del campo nel punto $P_0 \equiv (4,0,0)$.



si consideri un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$. Si ponga nell'origine delle coordinate la piccola sfera di ferro magnetizzata. Essa si puó considerare come un dipolo magnetico di momento magnetico $\vec{m}$.

Il campo di induzione magnetica generato dal dipolo in un generico punto P dello spazio é:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

che in coordinate cartesiane si scrive:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_x x + m_y y + m_z z)(x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z})}{r^5} - \frac{m_x\widehat{x} + m_y\widehat{y} + m_z\widehat{z}}{r^3}\right]$$

Le componenti cartesiane di $\vec{B}$ sono:

$$B_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_x x + m_y y + m_z z)x}{r^5} - \frac{m_x}{r^3}\right]$$

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_x x + m_y y + m_z z)y}{r^5} - \frac{m_y}{r^3}\right]$$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_x x + m_y y + m_z z)z}{r^5} - \frac{m_z}{r^3}\right]$$

Imponendo che nel punto $P \equiv (0,0,z^*)$ $(z^* = 5)$ le componenti del campo sono $B_x = B_y = 0$ e $B_z = B^*{}_z$ $(B^*{}_z = 1\ G)$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{m_x}{r^3}\right] \\ 0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{m_x}{r^3}\right] \\ B^*{}_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3m_z {z^*}^2}{r^5} - \frac{m_z}{r^3}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Dalle (1) si deduce immediatamente che $m_x = m_y = 0$ e quindi il dipolo magnetico é diretto lungo l'asse z.

Dalla terza equazione delle (1) ricaviamo m_z, tenendo conto che in questo caso r coincide con z il cui valore é $z^* = 5$.

$$B^*{}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2m_z}{{z^*}^3}\right]$$

da cui:

$$m_z = \frac{4\pi {z^*}^3 {B_z}^*}{2\mu_0} = \frac{{z^*}^3 {B_z}^*}{2}10^7 = \frac{(5)^3 \cdot 10^{-4}}{2}10^7 = \underline{\underline{62500\ A \cdot m^2}}$$

ed é ovviamente diretta lungo il verso positivo dell'asse z.

Calcoliamo, ora, il campo di induzione magnetica nel punto $P_0 \equiv (4,0,0)$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

Nel nostro caso $\vec{m} = m_z\widehat{z}$ e $\vec{r} = x\widehat{x}$.

Quindi:

$$\vec{B}(\vec{r^*}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{m_z\widehat{z}}{{x^*}^3}\right]$$

Quindi nel punto P_0 il campo é diretto lungo l'asse z negativo e vale:

$$B_z = -10^{-7}\cdot\frac{62500}{64} = \underline{\underline{-9.76\cdot 10^{-5}\ Wb/m^2 = -0.976 Gauss}}$$

00-29) Esercizio n. 1 del 25/11/2000

Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{E} = \widehat{x}(-yz + 2x) - \widehat{y}(zx) - \widehat{z}(xy)$$

Si discuta se tale campo possa essere di natura elettrostatica o no.

(vedi es. n.2 del 5/10/1999)
Calcoliamo $\vec{\nabla} \times \vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -yz + 2x & -zx & -xy \end{vmatrix} = \widehat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(-zx)\right] +$$

$$+\,\widehat{y}\left[\frac{\partial}{\partial z}(-yz + 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(-xy)\right] + \widehat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(-yz + 2x)\right] =$$

$$= \widehat{x}(-x + x) + \widehat{y}(-y + y) + \widehat{z}(-z + z) = 0$$

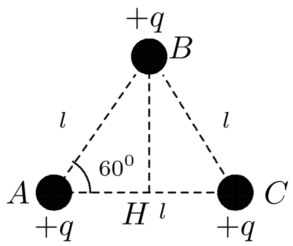
Quindi

$$\vec{E} = \widehat{x}(-yz + 2x) - \widehat{y}(zx) - \widehat{z}(xy)$$

puó essere un campo di natura elettrostatica.

00-30) Esercizio n. 2 del 25/11/2000

Un triangolo equilatero ha una carica puntiforme $+q$ su ciascun vertice. Calcolare il momento di dipolo della distribuzione, assumendo l'origine delle coordinate posta su ciascun vertice del triangolo.



Se $\vec{p}$ é il momento di dipolo di una distribuzione di cariche, si ha

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,'dq\,'$$

nel caso di distribuzione continua, e

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}\,'_i q\,'_i$$

nel caso di distribuzione discreta di cariche.

Poiché la distribuzione di cariche non é neutra, il momento di dipolo dipende dalla origine delle coordinate.

Scegliendo l'origine delle coordinate in A ed il segmento AC sull'asse x del sistema di riferimento, si ha:

$$\vec{p}_A = q\vec{r}_B + q\vec{r}_C = q\left(\frac{l}{2}\widehat{x} + \overline{BH}\widehat{y}\right) + ql\widehat{x}$$

Poiché:

$$\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

si ha:

$$\boxed{\vec{p}_A = q\frac{3}{2}l\widehat{x} + q\frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y}}$$

Per calcolare il momento di dipolo rispetto all'origine posta negli altri due vertici B e C rispettivamente, si applica il teorema sulla dipendenza del momento di dipolo dall'origine delle coordinate, ossia:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{R}Q$$

essendo $\vec{p}\,'$ il momento di dipolo rispetto alla nuova origine ed $\vec{R}$ vil vettore posizione della nuova origine rispetto alla vecchia.

Consideriamo allora l'origine in B, si ha:

$$\vec{R}_B = \vec{r}_B = \frac{l}{2}\widehat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y} \quad e \quad Q = +3q$$

Quindi:

$$\vec{p}_B = \vec{p}_A - \vec{R}_B 3q = q\frac{3}{2}l\widehat{x} + q\frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y} - 3q\frac{l}{2}\widehat{x} - 3q\frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y}$$

ossia:

$$\boxed{\vec{p}_B = -q\sqrt{3}l\widehat{y}}$$

Consideriamo, infine, l'origine in C; si ha:

$$\vec{R}_C = l\widehat{x}$$

Quindi:

$$\vec{p}_C = \vec{p}_A - \vec{R}_C 3q = q\frac{3}{2}l\widehat{x} + q\frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y} - 3ql\widehat{x}$$

ossia:

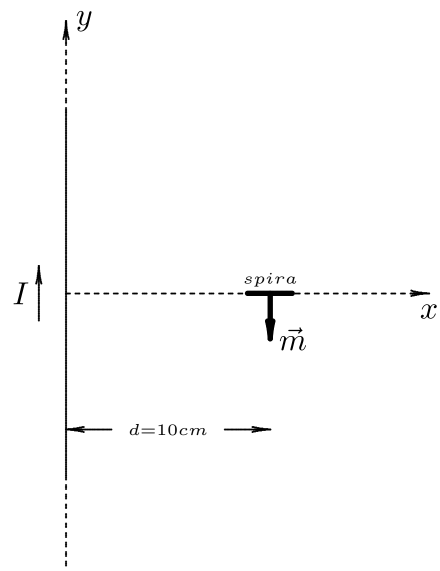
$$\boxed{\vec{p}_C = -q\frac{3}{2}l\widehat{x} + q\frac{\sqrt{3}}{2}l\widehat{y}}$$

00-31) Esercizio n. 3 del 25/11/2000

Una piccola spira percorsa da una corrente di intensitá $i = 1\ A$ e di raggio $a = 1\ mm$, é posta con il suo centro ad una distanza $d = 10\ cm$ da un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente di intensitá $I = 10\ A$. Calcolare la forza che agisce sulla spira nei seguenti casi: a) la normale al piano della spira é parallela alla direzione della corrente nel filo; b) il filo giace sullo stesso piano della spira.

---

a)



Supponiamo che il verso della corrente i nella spira sia tale che il suo momento magnetico risulti orientato verso l'asse y negativo, ossia:

$$\vec{m} = -m\widehat{y} = -i\pi a^2\widehat{y}$$

Poiché la spira é molto piccola ($a << d$) possiamo supporre costante sulla sua superficie il campo $\vec{B}$ generato dal filo percorso dalla corrente I. Tale campo sulla spira, fissato lungo l'asse y positivo la direzione e il verso della corrente I che scorre sul filo, é:

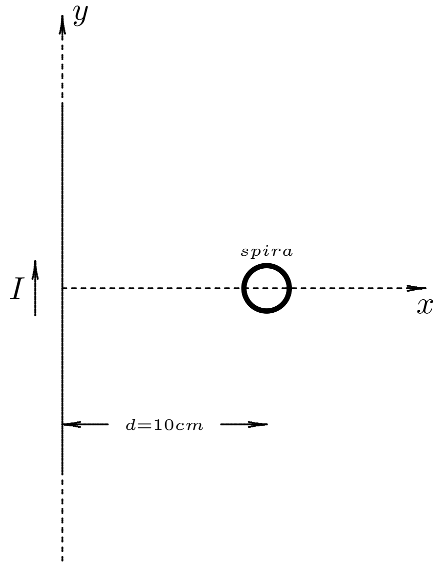
$$\vec{B} = -B\widehat{z} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{x}\right)_{(r=a)}\widehat{z}$$

La forza che agisce sulla spira é:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = 0$$

in quanto $\vec{m}$ é $\perp$ a $\vec{B}$.

b)



Supponiamo che il verso della corrente i nella spira sia tale che il suo momento magnetico risulti:

$$\vec{m} = -m\widehat{z} = -i\pi a^2\widehat{z}$$

Anche in questo caso il campo generato dal filo é costante sulla superficie della spira e vale su ciascun punto di essa:

$$\vec{B} = -B\widehat{z} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{x}\right)_{(x=d)}\widehat{z}$$

Pertanto la forza che agisce sulla spira é:

$$\vec{F} = \left[\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})\right]_{(x=d)} = i\pi a^2\frac{\mu_0}{2\pi}I\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{(x=d)}\widehat{x} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}iIa^2\left(-\frac{1}{d^2}\right)\widehat{x} = -\frac{4\pi}{2}10^{-7}\cdot 1\cdot 10\cdot 10^{-6}\frac{1}{10^{-2}}\widehat{x} = \underline{\underline{-2\pi\cdot 10^{-10}\widehat{x}\ N}}$$

La forza é attrattiva.

00-32) Esercizio n. 4 del 25/11/2000

Una certa quantitá di ammoniaca (considerata gas perfetto), in condizioni normali di temperatura e pressione ($T = 273.15\ K$ e $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5\ Pa$), é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E_0 = 3000\ V/m$. Sapendo che il modulo del momento di dipolo permanente della molecola di ammoniaca é $p_m = 4 \cdot 10^{-28}\ C \cdot m$, calcolare il modulo P della polarizzazione del gas dovuta al contributo dei soli dipoli permanenti. (Il volume molare di un gas perfetto in condizioni normali di temperatura e pressione é $V_m = 2.24138 \cdot 10^{-2}\ m^3$).

Si ipotizzi che il campo elettrico molecolare non si discosti dal campo elettrico applicato.

La polarizzazione P del gas dovuta al contributo dei soli dipoli permanenti é:

$$P = N p_m L(y)$$

essendo:

$$y = \frac{p_m E}{KT} = \frac{4 \cdot 10^{-28} \cdot 3000}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15} = 3.18 \cdot 10^{-4} << 1$$

In approssimazione $y << 1$, risulta:

$$L(y) \simeq \frac{1}{3} y$$

Pertanto:

$$L(3.18 \cdot 10^{-4}) \simeq \frac{1}{3} 3.18 \cdot 10^{-4} = 1.06 \cdot 10^{-4}$$

Il numero di atomi per unitá di volume N si ottiene ricordando che una mole di gas perfetto in condizioni normali di temperatura e pressione occupa un volume di $22.4\ dm^3 = 22.4 \cdot 10^{-3}\ m^3$. Conseguentemente:

$$N_A : 22.4 \cdot 10^{-3} = N : 1$$

da cui:

$$N = \frac{N_A}{22.4 \cdot 10^{-3}} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{2.68 \cdot 10^{25}\ m^{-3}}}$$

Quindi:

$$P = 2.68 \cdot 10^{25} \cdot 4 \cdot 10^{-28} \cdot 1.06 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{1.14 \cdot 10^{-6}\ C/m^2}}$$

Fine Esercizi Fisica II - 2000