Struttura stellare

costanti utili

$G_N = 6.7 \cdot 10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2}$

$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/^0K$

$1y \sim 3 \cdot 10^7\ s$

$M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\ Kg$

$R_\odot = 7 \cdot 10^8\ m$

$L_\odot = 4 \cdot 10^{26}\ J/s$

Equazioni di equilibrio stellare

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \quad \text{equilibrio idrostatico}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \text{conservazione della massa}$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\epsilon \quad \text{equilibrio termico}$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{16\sigma_B}\frac{\chi\,\rho}{T^3}\frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad \text{equilibrio radiativo}$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \quad \text{equilibrio convettivo}$$

\+ $P=P(\rho,T,_{\text{comp. chimica}})$

$\chi=\chi(\rho,T,_{\text{comp. chimica}})$

$\varepsilon=\varepsilon(\rho,T,_{\text{comp. chimica}})$

\+ EOS=Equation of state $P=nkT=n_mRT=\rho kT/m=\rho RT/m_m$

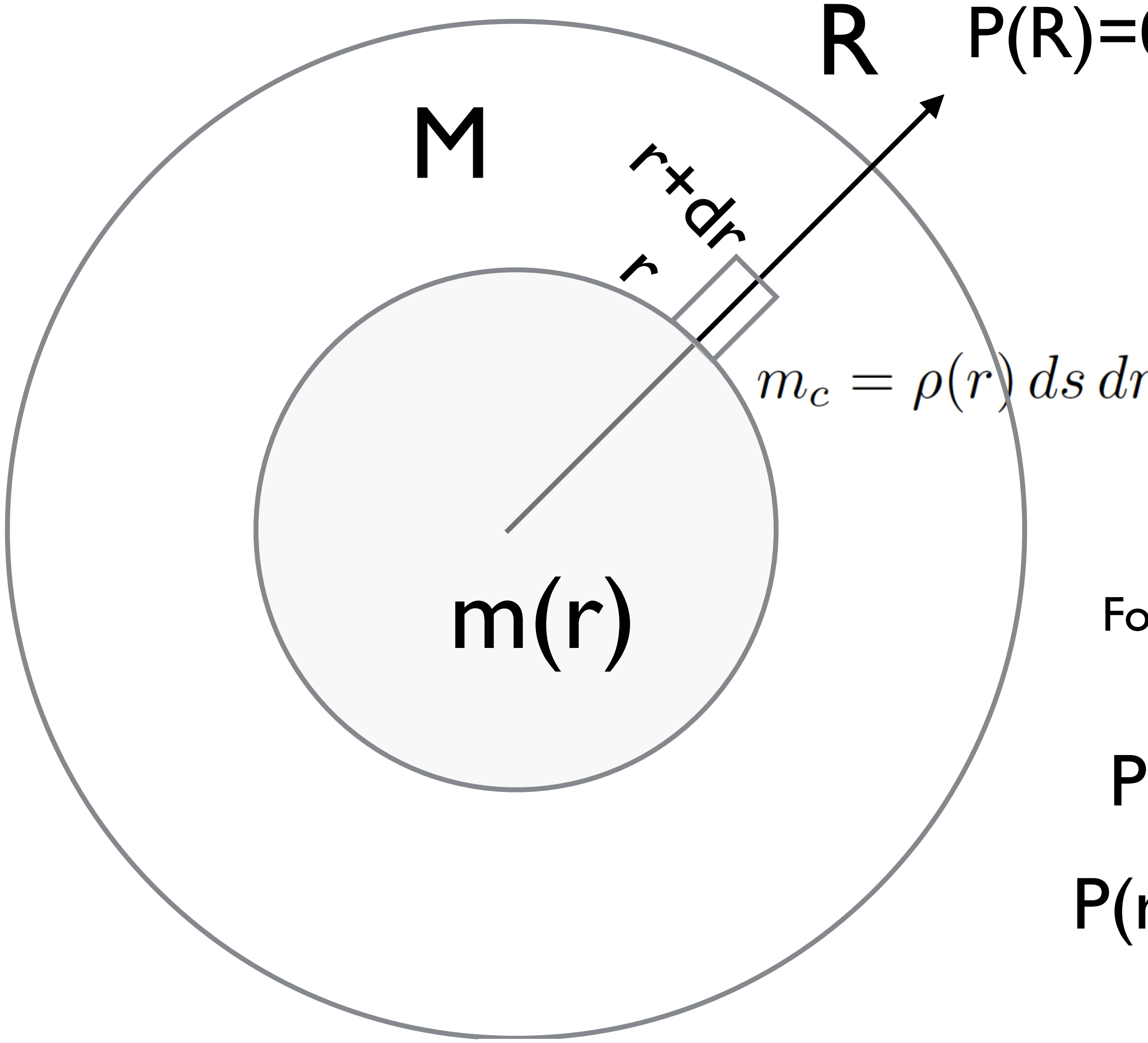
n=densità di molecole per unità di volume m=peso molecolare $n/N_A=n_m$

n_m=densità di moli per unità di volume m_m=peso molare $mN_A=m_m$

Equilibrio idrostatico

P(r+dr)<P(r)

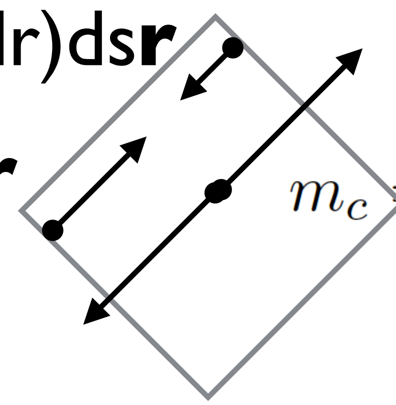
P(R)=0 raggio della stella; ρ(R)=0



$$m(R)=\int_V \rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}=$$

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho(\theta,\varphi,r)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,r^2dr=4\pi\int_0^r\rho(r)r^2dr$$

Forza di pressione interna $\mathbf{F}_P = -dP(r)ds\,\widehat{r} = -\dfrac{dP(r)}{dr}\,ds\,dr\,\widehat{r}$



$$\mathbf{F}_G = -G_N\frac{m_c m(r)}{r^2}\,\widehat{r}$$

Forza gravità determinata solo da m(r) (Teorema di Gauss)

Equilibrio idrostatico $\mathbf{F}_P+\mathbf{F}_G=0 \quad\longrightarrow\quad \dfrac{dP(r)}{dr}\cancel{ds}\,\cancel{dr} = -G_N\dfrac{\rho(r)\cancel{ds}\,\cancel{dr}\,m(r)}{r^2}$

P e T al centro del sole

$$\frac{dP}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2}$$

Applichiamo a $r=R_{\odot}/2$ con qualche approssimazione

$$\rho_{\odot}\left(\frac{R_{\odot}}{2}\right) \sim \langle\rho_{\odot}\rangle = \frac{M}{4/3\pi R^3} = \frac{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{Kg}}{4/3\pi(7 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^3} = \frac{10^{30-24}\,\mathrm{Kg/m^3}}{2/3\pi 49 \cdot 7}$$

$$\sim \frac{10^6\ \mathrm{Kg/m^3}}{2 \cdot 49 \cdot 7} \sim \frac{10^6\ \mathrm{Kg/m^3}}{14 \cdot 49} \sim \frac{10^6\ \mathrm{Kg/m^3}}{15 \cdot 50} \sim \frac{10^6\ \mathrm{Kg/m^3}}{750}$$

$$\sim 1.3 \cdot 10^3\ \mathrm{Kg/m^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle\rho_{\odot}\rangle = 1.4 \cdot 10^3\,\mathrm{Kg/m^3} \\ \langle\rho_{H2O}\rangle = 10^3\,\mathrm{Kg/m^3} \end{array}}$$

$$\frac{dP}{dr}\left(\frac{R_\odot}{2}\right) \sim \frac{P(R_\odot)-P(0)}{R_\odot} = \frac{-P(0)}{R_\odot}$$

$P(0)$=pressione al centro del sole=$P_\odot$

$$\frac{dP}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \xrightarrow{r=R_\odot/2} \frac{P_\odot}{R_\odot} = G_N \frac{\rho(R_\odot/2)m(R_\odot/2)}{(R_\odot/2)^2}$$

$$m(R_\odot/2) \sim M_\odot/2 \quad P_\odot = 2G_N \frac{<\rho_\odot> M_\odot}{R_\odot}$$

$$P_\odot = 2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2}\ \frac{1.4 \cdot 10^3\ Kg/m^3 2 \cdot 10^{30}\ Kg}{7 \cdot 10^8\ m}$$

$$P_\odot = 2 \cdot 2 \cdot 6.7 \cdot 1.4/7 \cdot 10^{-11+3+30-8} Nm^{-2} \sim 5.6 \cdot 10^{14} Nm^{-2}$$

$$\boxed{P_\odot = 5.6 \cdot 10^{14} Nm^{-2}}$$

$$P_\odot = \rho_\odot kT_\odot/m_p = <\rho_\odot> kT_\odot/m_p \qquad \rho_\odot = <\rho_\odot>$$

$$T_\odot = \frac{P_\odot m_H}{\rho_\odot k} = \frac{5.6\cdot 10^{14} Nm^{-2}\ 1.6\cdot 10^{-27} Kg}{1.4\cdot 10^3\ Kg/m^3\ 1.38\cdot 10^{-23} J/^0K}$$

$$= \frac{5.6\cdot 1.6}{1.4\cdot 1.38} 10^{14-27+23-3} \frac{Nm}{J/^0K} = \frac{5.6\cdot 1.6}{1.4\cdot 1.38} 10^7 \cdot {}^0K$$

$\boxed{T_\odot \sim 20\cdot 10^6 \cdot {}^0K}$ Sopra la soglia di fusione del H

$$\varepsilon_{T\odot}[\,J\,] = 3/2kT_\odot = 1.5 \cdot 1.38\cdot 10^{-23} J/^0K\ 20\cdot 10^6 \cdot {}^0K$$

$$\varepsilon_{T\odot}[\,eV] = \varepsilon_{T\odot}[\,J\,]/e = \frac{3kT_\odot}{2e} = \frac{3\cdot 1.38\cdot 10^{-23} J/^0K\ 20\cdot 10^6 \cdot {}^0K}{2\cdot 1.6\cdot 10^{-19} C}$$

$\boxed{\varepsilon_{T\odot}[\,eV] \sim 2.5 keV}$ NB: $1eV = e[C]\ 1V = 1.6\cdot 10^{-19} C\ 1V =$

Energia termica di H all'interno del Sole

Bilancio energetico

Pagina 10 dispense

$$2E_T + E_{GR} = 0$$

$$\Delta E_{GR} = E_{GR}(R_f) - E_{GR}(R_i) = -\frac{3}{5} G_N M^2 \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} \right)$$

$\Delta E_T = -\Delta E_{GR}/2$ Teorema del viriale

$\Delta E_{GR} + \Delta E_{GR} + L\Delta t = 0$ Conservazione dell'energia

$L\Delta t = -\Delta E_{GR}/2$ In assenza di reazioni nucleari

Tempo di Kelvin

Energia gravitazionale $E_G = \int -G_N \frac{m(r)dm}{r}$

Densità costante

$$= -G_N \int_0^R \frac{m(r)}{r} \rho 4\pi r^2 dr =$$

$$\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3} \quad m(r) = \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$-G_N \int_0^R \frac{1}{r} \frac{Mr^3}{R^3} \frac{M}{4/3\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{-3G_N M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr$$

$$\boxed{E_G = \frac{-3}{5} \frac{G_N M^2}{R}}$$

$$\boxed{E_G = \frac{-3}{5}\,\frac{G_N M^2}{R}}$$

$$|E_{G\odot}| = \frac{3}{5}\,\frac{6.7 \cdot 10^{-11}\,Nm^2Kg^{-2}\;\;4 \cdot 10^{60}\,Kg^2}{7 \cdot 10^8\,m}$$

$$= \frac{3 \cdot 6.7 \cdot 4}{5 \cdot 7}\,10^{-11-8+60}\,\frac{Nm^2Kg^{-2+2}}{m}$$

$$|E_{G\odot}| \sim 2 \cdot 10^{41}\ J$$

$$T_{G\odot} = \frac{|E_{G\odot}|}{L_\odot} = \frac{2 \cdot 10^{41}\ J}{4 \cdot 10^{26}\ J/s} = 0.5 \cdot 10^{15}\ s$$

$1y \sim 3 \cdot 10^7\ s$

$$\boxed{T_{G\odot} \sim 10^7\ y}$$

Tempo di contrazione di Kelvin

Tempo dell' energia chimica

Energia liberata dalla combustione di CO_2=3.35 · 10^7 J/kg

Se sole composto da 1/3 di C e 2/3 di O brucia completamente producendo una energia di origine chimica pari a

$$E_{chimica\odot} = \frac{1}{3} 2 \cdot 10^{30} \text{Kg} \; 3.35 \cdot 10^{7} \text{J/kg} = 2 \cdot 10^{37} \text{J}$$

$$\frac{E_{chimica\odot}}{|E_{G\odot}|} = \frac{2 \cdot 10^{37}}{2 \cdot 10^{41}} = 10^{-4} \quad \boxed{T_{chimica\odot} \sim 10^{3}\ y}$$

Tempo dell' energia nucleare

$$E_{annichilazione\odot} = M_\odot c^2 = 2 \cdot 10^{30}\,Kg \cdot 9 \cdot 10^{16}\,m^2\,s^{-2}$$

$$E_{annichilazione\odot} = 2 \cdot 10^{47}\,J$$

$$\frac{E_{annichilazione\odot}}{|E_{G\odot}|} = \frac{2 \cdot 10^{47}}{2 \cdot 10^{41}} = 10^6 \qquad \boxed{T_{annichilazione\odot} \sim 10^{13}\,y}$$

Energia di fusione circa 8 MeV/nucleone contro gli 1GeV/ nucleone di annichilazione (massa del nucleone)

$$\frac{E_{fusione\odot}}{E_{annichilazione\odot}} = \frac{1\,MeV}{1\,GeV} \sim 0.001 \qquad \boxed{T_{fusione\odot} \sim 10^{10}\,y}$$

<u>La vita del sole e' compatibile con il tempo previsto per la fusione dell'idrogeno di cui è composto</u>

Equilibrio termodinamico

Bilancio energetico dettagliato del gas stellare:

1. Energia termica
2. Lavoro compiuto dalla forza di pressione
3. Energia di origine nucleare
4. Variazione della luminosità

<u>Valutiamo tutte queste quantità del gas stellare come sempre riferendoci all' unità di massa</u>

1. Energia termica per unità di massa $= \dfrac{3kT}{2m}$

2. Lavoro compiuto dalla forza di pressione per unità di massa

$$\frac{\text{Lavoro}}{M} = \frac{-PdV}{M} = \frac{-PdV}{\rho V} = \frac{Pd\rho}{\rho^2}$$

Scritto in termini di ρ e p

$\rho = M/V$

$$\boxed{d\rho = \frac{-MdV}{V^2} = \frac{-\rho dV}{V}}$$

3. Energia di origine nucleare prodotta dalla massa unitaria nell'unità di tempo = ε

4. L'energia luminosa persa nell'unità di tempo per unità di massa:

$$\frac{\text{dLuminosità}}{M} = \frac{\text{dLuminosità}}{\rho dV} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{dL}{dr}$$

volume di una corona di raggio r e spessore dr

$$dV=4\pi r^2 dr$$

3. e 4. sono già riferite all'unità di tempo la 1. e 2. vanno divise per dt prima di fare il bilancio dettagliato. L'energia termica 1. cambia a seguito della 2., 3. e 4. con la 4. con segno negativo perche' e' una perdita di energia

$$\frac{d}{dt}\frac{3kT}{2m} = \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2 \rho}\frac{dL}{dr}$$

Conviene far sparire T in favore di ρ e P con $P = \dfrac{\rho kT}{m}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{3P}{2\rho} = \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL}{dr}}$$

$$\frac{3}{2\rho}\frac{dP}{dt} - \frac{3P}{2\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL}{dr}$$

$$\frac{3}{2\rho}\frac{dP}{dt} - \frac{5P}{2\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL}{dr}$$

Raggruppare i termini in ρ e P in un solo termine.

$$a\rho^x \frac{d}{dt}\frac{P}{\rho^y} = a\rho^{x+y}\frac{dP}{dt} - ay\rho^{x-y-1}\frac{P}{\rho^{y-1}}\frac{d\rho}{dt}$$

se $a=3/2$, $x=2/3$ e $y=5/3$ ottengo i due termini voluti

$$\boxed{\rho^{2/3}\frac{d}{dt}\frac{3P}{2\rho^{5/3}} = \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL}{dr}}$$

Equazione dell'equilibrio termico

$$\boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho\left[\varepsilon - \rho^{2/3}\frac{d}{dt}\frac{3P}{2\rho^{5/3}}\right]}$$

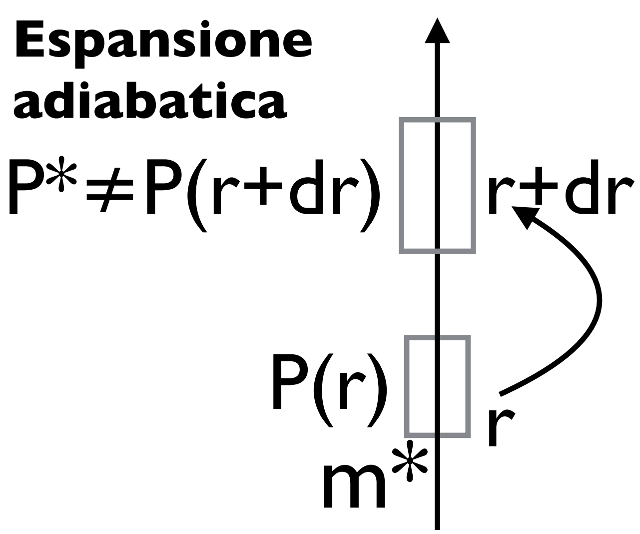
- In condizioni stazionarie $\varepsilon>0$ (reazioni nucleari nel core).
- Se $\varepsilon=0$ (reazioni nucleari nel core si spengono) allora la stella evolve contraendosi al fine di mantenere la luminosità convertendo l'energia gravitazionale in termica.
- Lo spegnersi delle reazioni non cambierebbe di molto la luminosità e la stabilità di una stella perche' la contrazione gravitazionale ha tempi lunghi (tempo di Kelvin fino a milioni di anni), l'unica cosa e' che la stella non emetterà più i neutrini emessi nelle reazioni nucleari.
- Le reazioni nucleari in seguito potrebbero riaccendersi e comunque la luminosità aumenterebbe di poco.

Perchè le stelle sono stabili per lunghissimi tempi

- La forza di pressione è sostenuta dalla fusione nucleare del core
- Il tasso delle reazioni di fusione nucleare dipende da T^x con una legge di potenza ($x>>1$: ciclo pp $x=4$, ciclo CNO $x=18$, fusione elio $x=41$).
- Un aumento di temperatura comporta un aumento esponenziale del tasso di reazioni nucleari
- Basta un piccolissimo aggiustamento del raggio, e quindi della temperatura, della stella per ripristinare il tasso di reazioni nucleari che si era ridotto a causa del combustibile nucleare per la fusione
- La stella è stabile per lungo tempo perchè il tasso delle reazioni nucleari dipende esponenzialmente da T.
- Solo quando il combustibile si e' ridotto di diversi ordini di grandezza la stella si contrae in tempi brevi

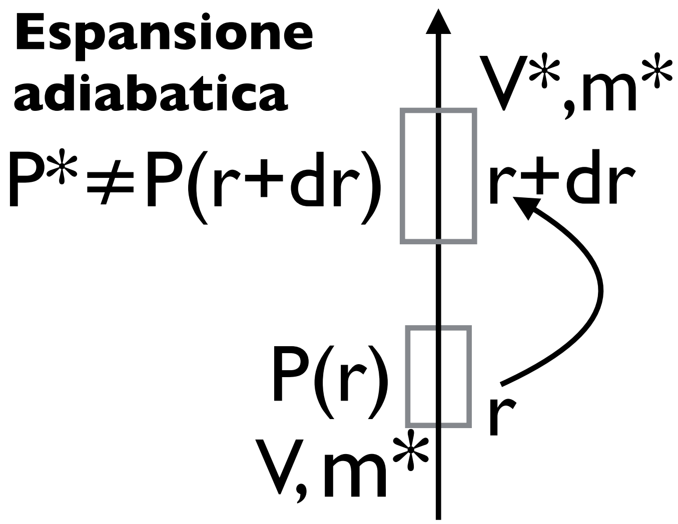
Equilibrio convettivo

La stella è stabile rispetto a moti convettivi se spostando una quantità di materiale stellare di massa m* verso l'alto riceve dalla materia stellare circostante una forza di richiamo verso il basso.



- m* in r è in equilibrio con la materia circostante a pressione P(r) e temperatura T(r)
- Sposto m* da r a r+dr che non si troverà in equilibrio con la materia circostante perchè quest'ultima è a pressione $P(r+dr)<P(r)$ e temperatura $T(r+dr)<T(r)$
- m* in r+dr tende ad espandersi in modo adiabatico, siccome in una stella la conduzione termica ed il trasporto di radiazione sono relativamente lenti rispetto all'espansione del gas stellare
- l'espansione adiabatica di m* si ferma quando la sua pressione interna P* è uguale alla pressione della materia stellare circostante P*=P(r+dr)
- In r+dr la forza di attrazione gravitazionale su m* e' proporzionale alla sua densita ρ* raggiunta alla fine della sua espansione adiabatica
- Quindi in r+dr la forza di pressione non e' cambiata ma la forza di gravità e' cambiata proporzionalmente a ρ*-ρ(r+dr).
- La stabilità si ha se la forza di gravità richiama m* al suo posto, cioe' se ρ*-ρ(r+dr).

La stabilià contro il moto convettivo si ha se spostando una frazione di materia stellare verso l'esterno e dopo essersi espansa adiabaticamente per portarsi in equilibrio con la materia stellare circostante la sua densità resta maggiore della densità della materia stellare circostante.
La stabilità si ha se la forza di gravità richiama m* al suo posto, cioe' se $\rho^* > \rho(r+dr)$.



$\rho^* > \rho(r+dr)$ condizione di stabilità convettiva

La condizione di stabilià contro il moto convettivo è meglio esprimerla in termini di P,ρ oppure P,T.

Espansione adiabatica $\qquad\qquad$ **Espansione adiabatica**

$$P(r)V^\gamma = P(r+rd)(V^*)^\gamma \longrightarrow m^* = \rho(r)V \longrightarrow \frac{P(r)}{\rho(r)^\gamma} = \frac{P(r+dr)}{\rho^{*\gamma}}$$

$$\frac{\rho^{*\gamma}}{\rho(r)^\gamma} = \frac{P(r+dr)}{P(r)} \qquad \frac{\rho^*}{\rho(r)} = \frac{P(r+dr)^{1/\gamma}}{P(r)^{1/\gamma}} = \left[\frac{P(r)+dP(r)}{P(r)}\right]^{1/\gamma}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho(r)} \sim \left[1+\frac{dP(r)}{P(r)}\right]^{1/\gamma} \sim 1+\frac{dP(r)}{\gamma P(r)} \sim 1+\frac{1}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr}$$

$$\rho^* \sim \rho(r)\left[1+\frac{1}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr}\right]$$

$$\boxed{\rho^* > \rho(r+dr)}$$ condizione di stabilità convettiva

$$\cancel{\rho(r)}\left[\cancel{1}+\frac{1}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr}\right] > \rho(r+dr) = \cancel{\rho(r)}+\frac{d\rho(r)}{dr}dr$$

$$\frac{\rho(r)}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr} > \frac{d\rho(r)}{dr}dr$$

$$\boxed{\frac{-1}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr} < \frac{-1}{\rho(r)}\frac{d\rho(r)}{dr}}$$ condizione di stabilità convettiva

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dr} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{-1}{\gamma P(r)}\frac{dP(r)}{dr} < \frac{-1}{P(r)}\frac{dP(r)}{dr} + \frac{1}{T(r)}\frac{dT(r)}{dr}$$

condizione di stabilità convettiva

$$\boxed{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} > -\frac{dT}{dr}}$$

eq. di equilibrio convettivo (next slide)

$$\boxed{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} = -\frac{dT}{dr}}$$

gradiente adiabatico della temperatura

NB: tutti i gradienti sono negativi quindi -d/dr>0

Trasporto di calore per convezione

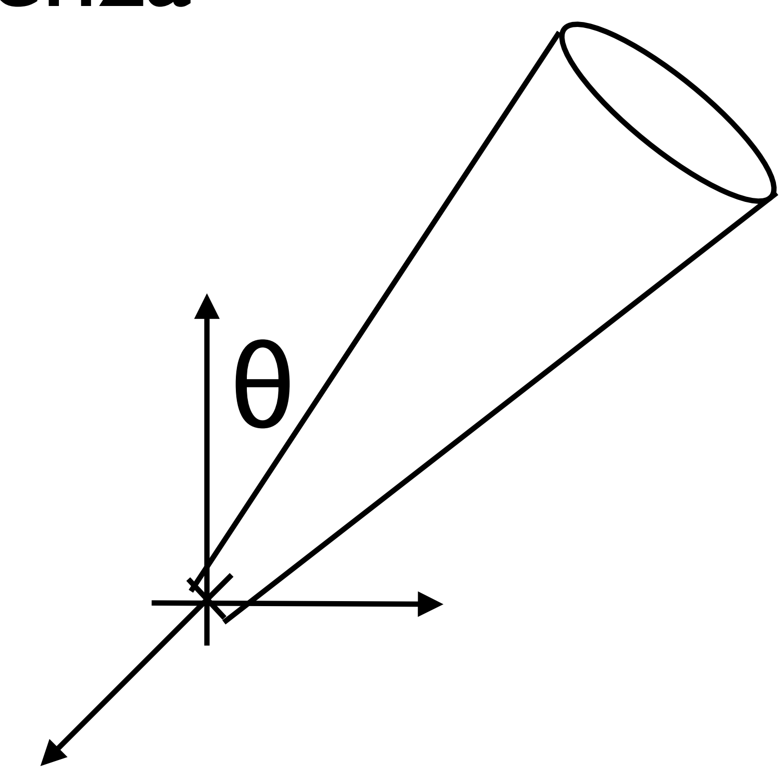
$\rho^* < \rho(r+dr)$ condizione di instabilità convettiva. Siccome $P^*=P(r+dr)$ comporta che $T^* > T(r+dr)$ perche' a parità di pressione un gas più denso è più caldo.
Quindi in condizioni di instabilità convettiva uno straterello di materia interna si sposta verso l'esterno e si porta a temperatura più alta della materia stellare contribuendo al suo riscaldamento portando via calore dalla materia stellare più interna.

Similmente in condizioni di instabilità convettiva uno straterello di materia esterna si sposta verso l'interno e si porta a temperatura più bassa della materia stellare circostante contribuendo al suo raffreddamento rilasciando calore alla materia stellare più esterna.

Il moto convettivo mescolando materia calda interna con materia esterna esterna (e vicerversa) tende a ridurre il gradiente di temperatura $-dT/dr$ e portarsi nella condizione di stabilità.
Il gradiente di temperatura pero' non puo' ridursi troppo perche' la luminosità e' proporzionale a $-dT/dr$ (equazione del trasporto radiativo).
Detto in altro modo <u>le reazioni nucleari del core aumentano dL/dr (equazione dell'equilibrio termico) e quindi L. Questa energia puo' essere portata via efficientemente dalla radiazione solo se dT/dr è elevato, ma cio' porta ad instabilità convettiva che riduce dT/dr. L'equilibrio convettivo si ottiene quindi con il segno di uguaglianza nell'espressione precedente</u>

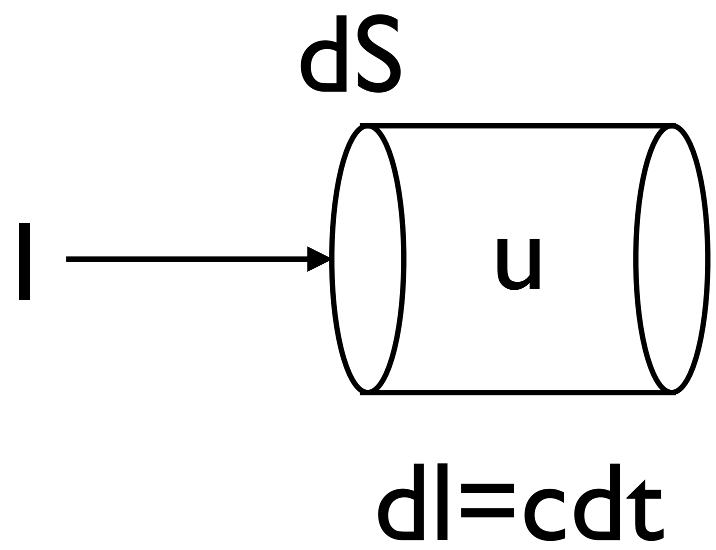
Campo di radiazione

L'intensità del campo di radiazione $I(\varphi,\theta)$ in un punto è definito dall'energia uscente dE dalla superfice dS lungo l'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo secondo la formula $dE=I(\varphi,\theta)dSd\Omega dt$ oppure $dW=I(\varphi,\theta)dSd\Omega$ dove dW è la potenza

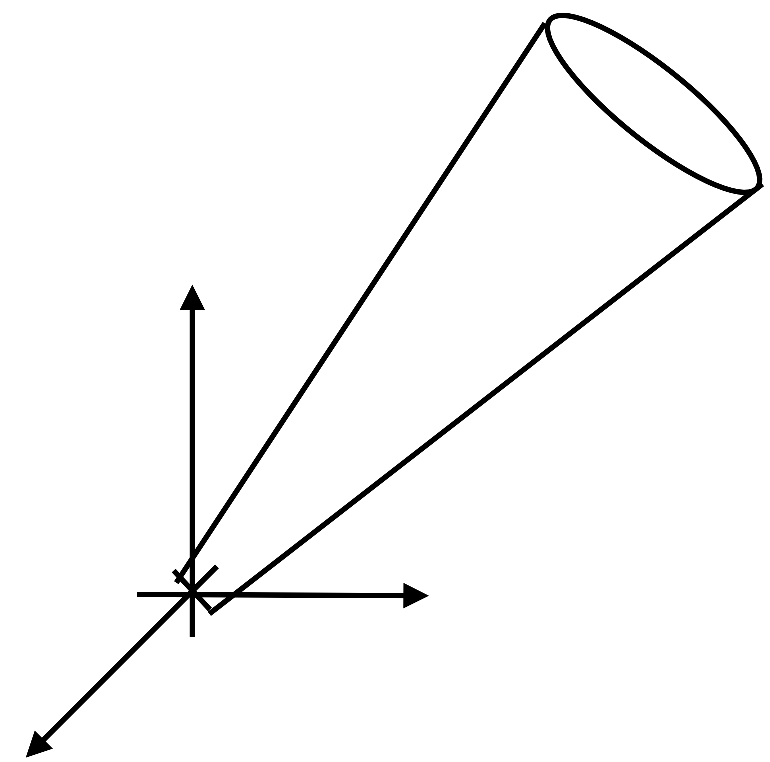


[I]=Joule/sec/m2/steradiante

Densità di energia

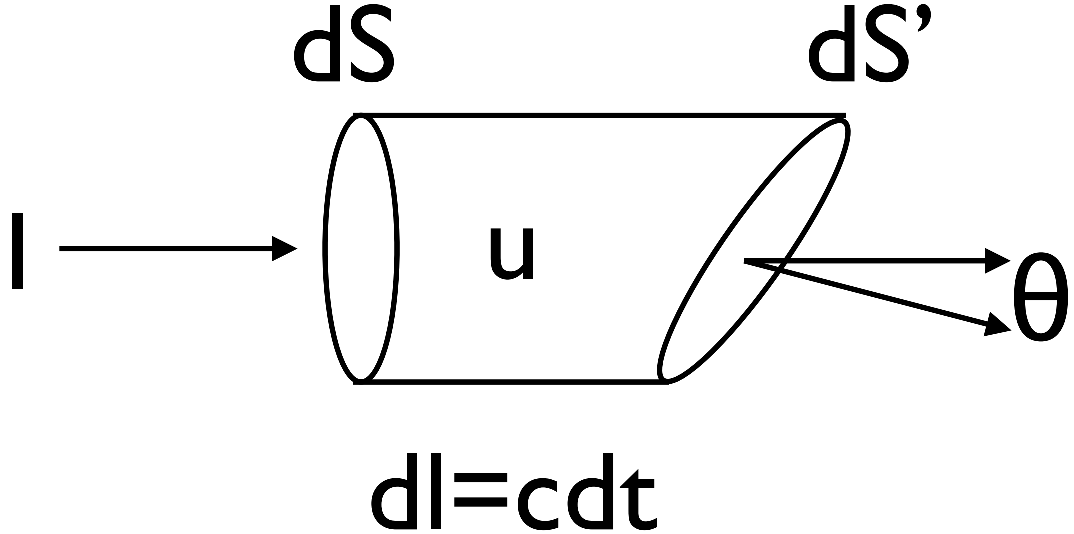


$$u=\frac{dE}{dV}=\frac{I\,dS\,dt}{dS\,dl}=\frac{I}{c}$$

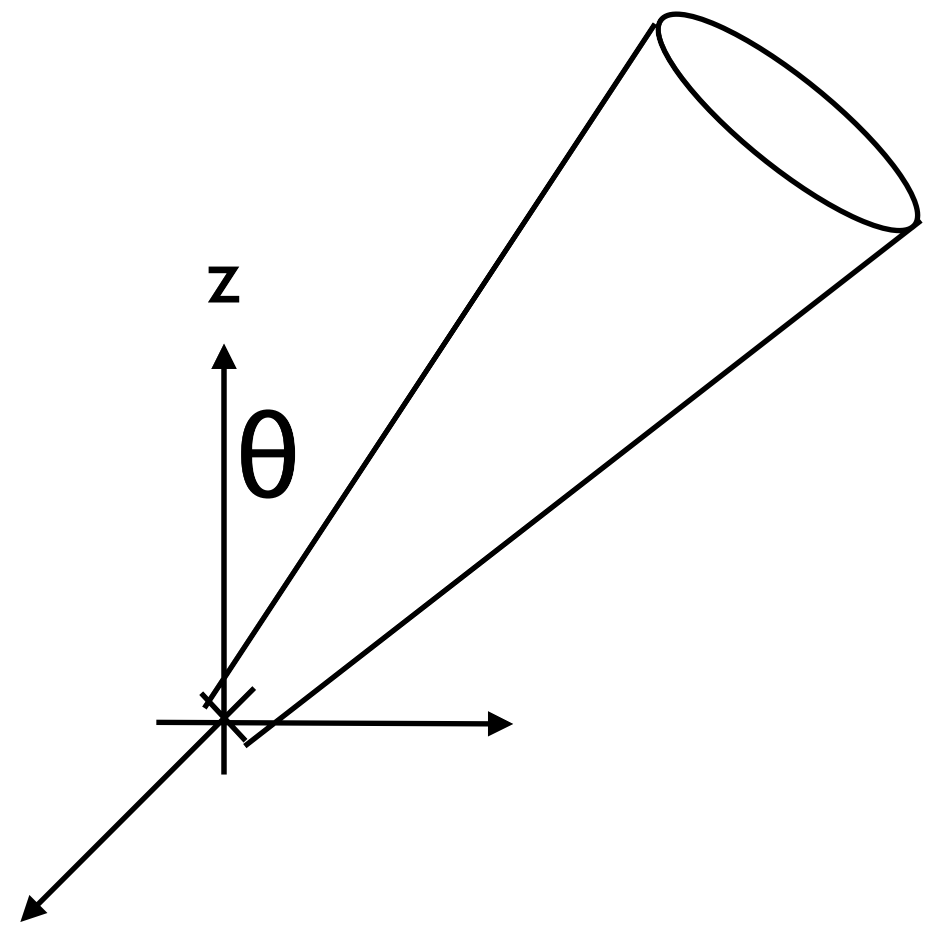


$$u=\frac{I}{c}\int d\Omega\; I(\varphi,\theta)$$

Flusso totale di energia



$$H = IdS = IdS'\cos\theta$$

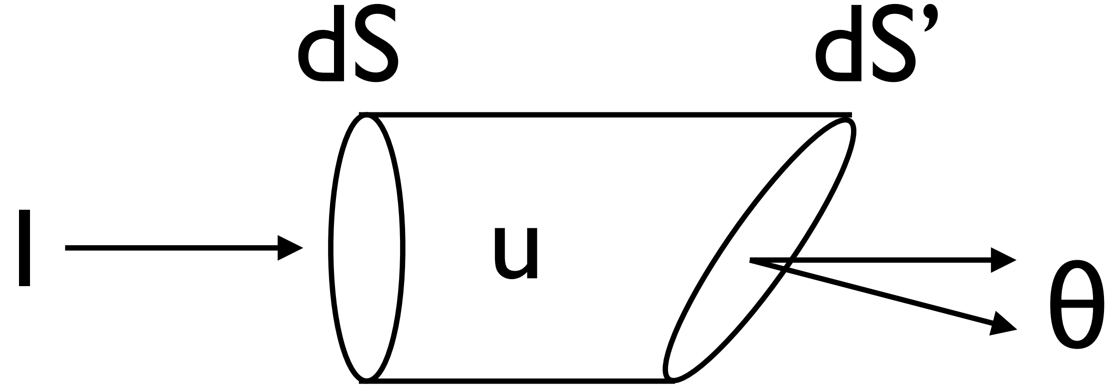


Fattore $\cos\theta$ dovuto all’area inclinata sorgente del campo di radiazione rispetto l’asse z lungo il quale si vuole valutare H

$$H = \int d\Omega \, I(\varphi,\theta)\cos\theta$$

Flusso totale verso l’alto

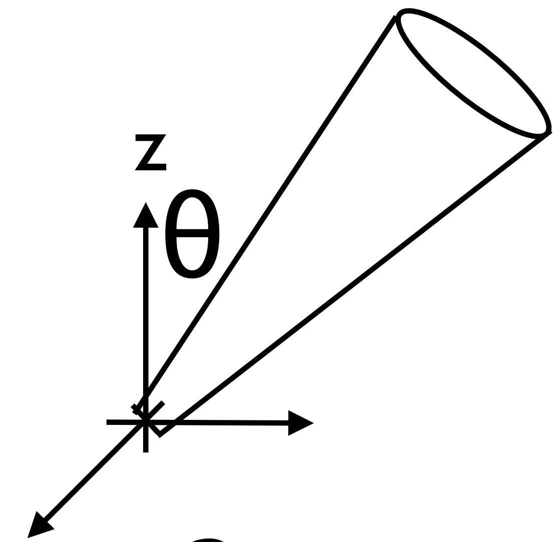
Pressione di radiazione



q=E/c relazione quantità di moto - energia per i fotoni

F=dq/dt=E/c/dt=I/c dS dl/c/dt=I/c dS

dl=cdt



Componente della forza normale a dS'

Componente della forza normale a dS'

$$P=\frac{dF'}{dS'}=\frac{dF\cos\theta}{dS/\cos\theta}=\frac{I/c\,dS}{dS}\cos\theta^2$$

$$P=\frac{I}{c}\cos\theta^2$$

$$P=\frac{I}{c}\int d\Omega\; I(\varphi,\theta)\cos\theta^2$$

Pressione di radiazione verso l'alto

Fattore $\cos^2\theta$ dovuto all'area inclinata sorgente del campo di radiazione e alla proiezione della forza rispetto l'asse z rispetto al quale si vuole calcolare P.

Coefficiente di Assorbimento

$I(z)=I(0)e^{-\chi z}$

$\lambda = n\sigma$ libero cammino medio [m]

$\chi = \frac{1}{n\sigma}$ coeff. di assorbimento [m^{-1}]

I=intensità luminosa

σ=sezione d'urto fotone-molecole

n=densità molecolare

χdl=frazione di flusso assorbità in uno spessore dl

NB: χ non è definito per unità di massa come sulle dispense

Sulle dispense $\chi \to \chi/\rho$ detta OPACITA' [m^2/Kg]

OPACITA' del sole ~ 0.1 m^2/Kg

Legge di Kirchhoff

Corpo nero all'equilibrio termodinamico a temperatura T

La superfice $A_{corpo\ nero}$ del corpo nero assorbe un flusso di energia $F_{corpo\ nero}$ uguale a quello che emette.

Superfice $A_{corpo\ nero}$ rimpiazzata con una superfice grigia A

All'equilibrio termodinamico la superfice grigia A e' colpita da un flusso $F_{corpo\ nero}$ ed assorbe un flusso pari al suo coefficiente di assorbimento per il flusso $\chi F_{corpo\ nero}$

L'equilibrio termodinamico è mantenuto se e solo se la superfice grigia A, che assorbe il flusso $\chi F_{corpo\ nero}$, emette il flusso $\chi F_{corpo\ nero}$

Emissione di corpo grigio = (assorbimento) x Emissione di corpo nero

Un corpo grigio all'equilibrio termodinamico emette una radiazione termica pari a quella di corpo nero moltiplicato per il suo coefficiente di assorbimento

NB: Un corpo grigio deve assorbire la radiazione che emette termicamente ma non e' detto che emette termicamente la radiazione che assorbe.
Esempio: un corpo nero a temperatura ambiente assorbe il visibile ma emette nell'infrarosso.

Densità di energia corpo nero

Energia termica emessa per unità di tempo e di superfice

$F=\sigma_{SB}T^4$

Densità di energia termica (Energia termica per unità di volume)

$u=aT^4=4\sigma_{SB}/cT^4$

dove $a=4\sigma_{SB}/c$ è la costante di corpo nero

La densità di energia impiega un tempo $dt=dl/c$ per attraversare il corpo grigio, il quale ne assorbe la quantità $(\chi dl)u$.
<u>Quindi per il teorema di Kirchhoff la quantità di energia emessa per unità di volume nell'unità di tempo è data da $(\chi dl)u/dt=\chi cu=\chi caT^4$</u>

TRASPORTO RADIATIVO

Dispense: 2.4 trasporto radiativo energia

$<dT_{\odot}/dr> \sim T_{int} - T_{sup}/R_{\odot} = 15E6\,^{0}K/7E8m \sim 0.02\,^{0}K/m$

TEMPO DI FUGA DI UN FOTONE

$\lambda = 1/(\chi\rho)$ libero cammino medio fotone ~ 0.7 cm ~ 1 cm.
Fotone percorre una distanza media R per random walk urtando $(R/\lambda)^2$ volte.
Il tempo tra un urto e l'altro e' $t=\lambda/c$
Il tempo medio di percorrenza di un raggio solare e':

$$T = t\,(R/\lambda)^2 = t\,(R\chi\rho)^2$$

$(R\chi\rho)^2 \sim 10^{22}$ $\qquad t=\lambda/c=10^{-2}\mathrm{m}/3\,10^{8}\mathrm{m/s}=0.3\,10^{-10}\mathrm{s}$

$$T=3\,10^{11}\mathrm{s}=10000\mathrm{y}$$

$\boxed{\text{Tempi di trasporto radiativo lenti}}$

STABILITA' DI UNA STELLA DELLA Seq. Prin.

- In condizioni di equilibrio radiativo, cioe' in condizioni di quasi-equilibrio tra materia stellare e fotoni, la luminosità L della stella e' determinata dalla equazione di trasporto radiativo.
- Gradiente di T determina L secondo l'equazione di trasporto radiativo e le reazioni nucleari e/o le contrazioni/espansioni della stella si aggiustano al fine di soddisfare la equazione di equilibrio termico
- Se il tasso delle reazioni nucleari diventa troppo lento da soddisfare l'equazione di equilibrio termico, cioe' non riesce a sostenere la Luminosità L della stella, allora il meccanismo più rapido di risposta e' la contrazione della stella e non il cambiamento del gradiente di T perche' questo procede attraverso il trasporto radiativo che e' lento.
- Metà dell'energia gravitazionale di contrazione va a sostenere L e l'altra metà a scaldare la stella per quel che basta per aumentare il tasso di reazioni nucleari e ripristinare l'equilibrio termico.

I tempi di scala dell'evoluzione temporale dell'equazione radiativa è molto più lenta di quelli dell'equazione di equilibrio termico (reazioni nucleari dipendono esponenzialmente da T)