Fisica Nucleare

Costanti utili

$h=6.6 \cdot 10^{-34}$ J · s

$\hbar=h/(2\pi)\sim10^{-34}$ J · s

$\underline{\hbar\sim6.6 \cdot 10^{-16}\ \text{eV} \cdot \text{s}}$

$\underline{\hbar c\sim200 \cdot \text{MeV} \cdot \text{fm}}$

$1\text{fm}=10^{-15}$ m

Densità centro del nucleo=
0.17Nucleoni/fm=$3 \cdot 10^{17}$kg/m^3

Densità media del nucleo=
0.13Nucleoni/fm

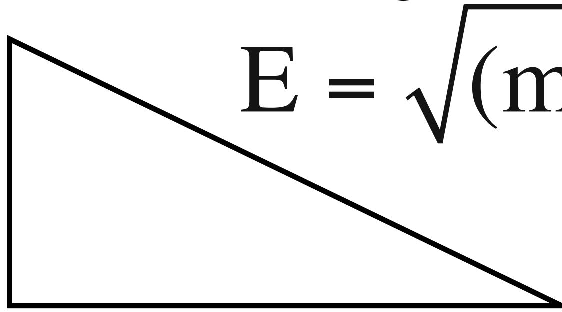
Distanza media dei nucleoni nel nucleo=1.8 fm

Raggio del nucleo $=R_0 A^{1/3}$
dove R_0=1.2 fm

Cinematica relativistica e limite classico

Energia a riposo

m_0c^2



Energia relativistica

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}$$

pc Momento relativistico x c

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{E}{m_0c^2} = \dfrac{E}{E_0} \\ \beta = \dfrac{pc}{E} \end{cases}$$

$$T = E - m_0c^2 = E - E_0$$

L'energia cinetica è per definizione la differenza tra energia relativistica e energia a riposo. Nel limite classico si riduce alla nota definizione

$$pc << m_0c^2$$

$$T = E - E_0 = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2 = m_0c^2[\sqrt{1 + (\frac{pc}{m_0c^2})^2} - 1] \approx$$

$$m_0c^2[1 + (\frac{pc}{m_0c^2})^2 - 1] = \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{m_0c^2} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0} = \frac{m_0v^2}{2}$$

Spesso la massa si misura in energia e si intende Energia/c^2

Ad esempio la massa a riposo dell'elettrone vale 0.5MeV e si scrive 0.5MeV/c^2 per ricordare che va moltiplicata per c^2 per ottenere la massa.

Spesso il momento si misura in energia e si intende Energia/c

Ad esempio il momento di Fermi dei nucleoni nel nucleo vale 250MeV e si scrive 250MeV/c per ricordare che va moltiplicata per c per ottenere una quantità di moto.

NB: nei due esempi in realtà bisogna prima trasformare MeV in Joule e quindi bisogna convertire MeV in eV e moltiplicare per la carica dell'elettrone.

Introduzione al nucleo

2.2 I nuclidi

- -Legge di Moseley
- -Energia di legame
- -Spettroscopia di massa
- -Abbondanza naturale dei nuclidi
- -Bilancio dettagliato reazioni nucleari

2.3 Parametrizzazione energia di legame

- -La formula di Weizsacker
- -Modello a goccia

Bilancio energetico reazione nucleare di formazione del deutone

$n+H \rightarrow d+\gamma$ reazione di cattura neutrone termico (~1/40eV)

Conservazione energia (trascuro energia n e H fermo):

Energia di legame deutone = energia fotone + energia cinetica deutone

Energia di legame deutone = $E_\gamma + T_d = E_\gamma + q_d^2/(2M_d)$

Conservazione momento (n quasi fermo e H fermo):

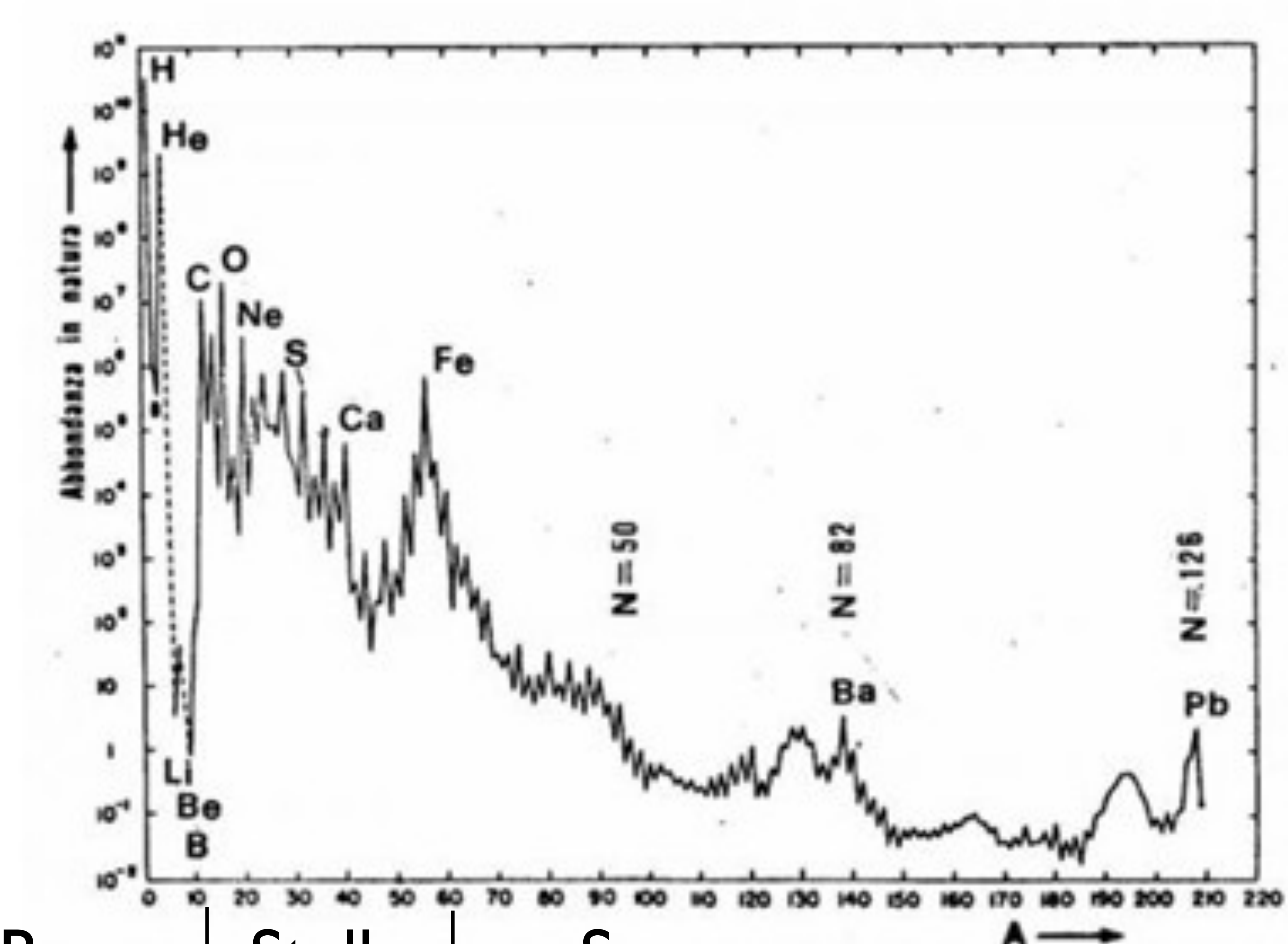
Momento neutrone e protone trascurabili quindi $q_\gamma = -q_d = E_\gamma/c$

Energia di legame deutone = $E_\gamma + (E_\gamma)^2/(2M_d c^2) \sim E_\gamma =$

E_γ misurata = 2.225MeV

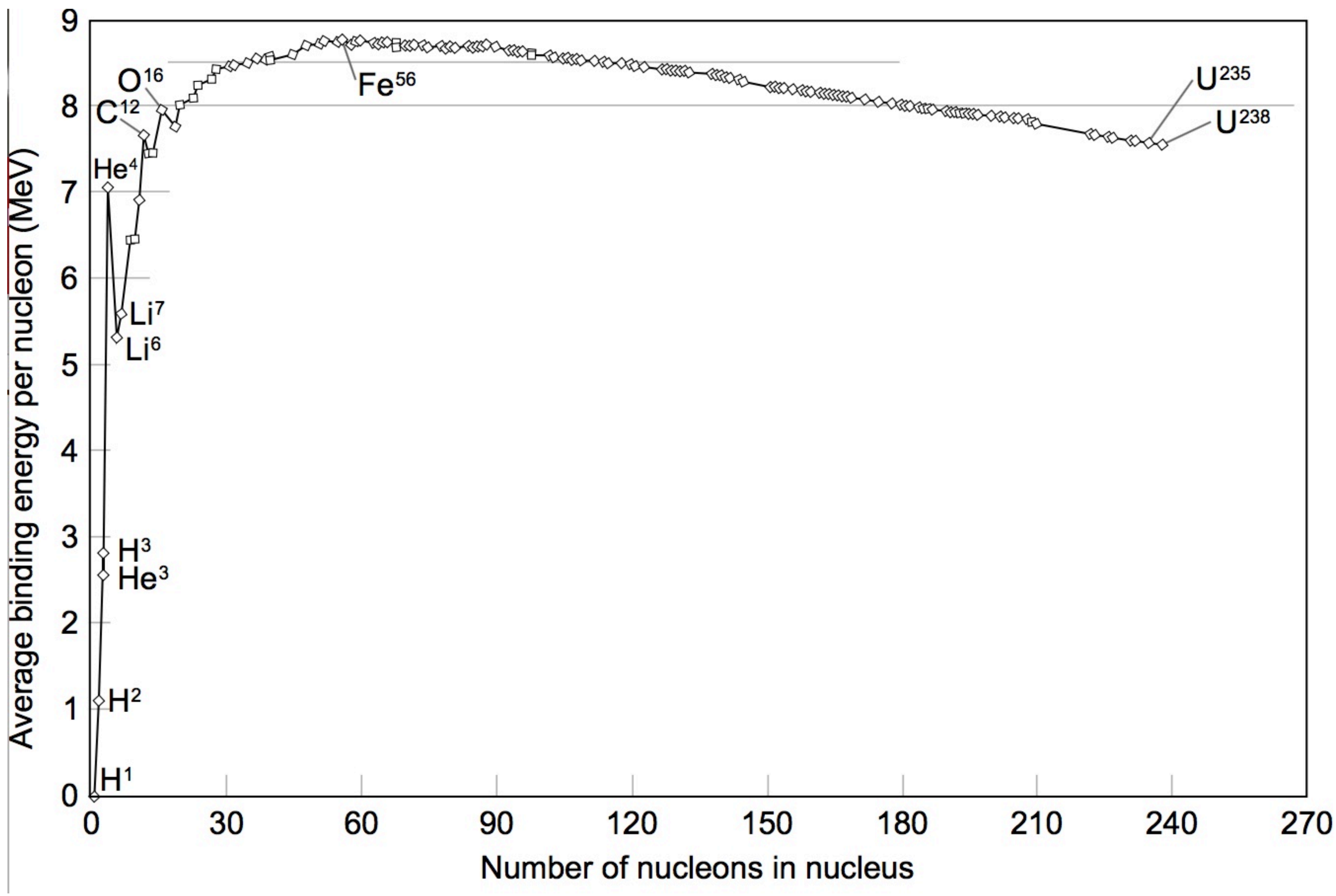
NB: relazioni non relativistiche M ~ GeV

Abbondanza nuclidi



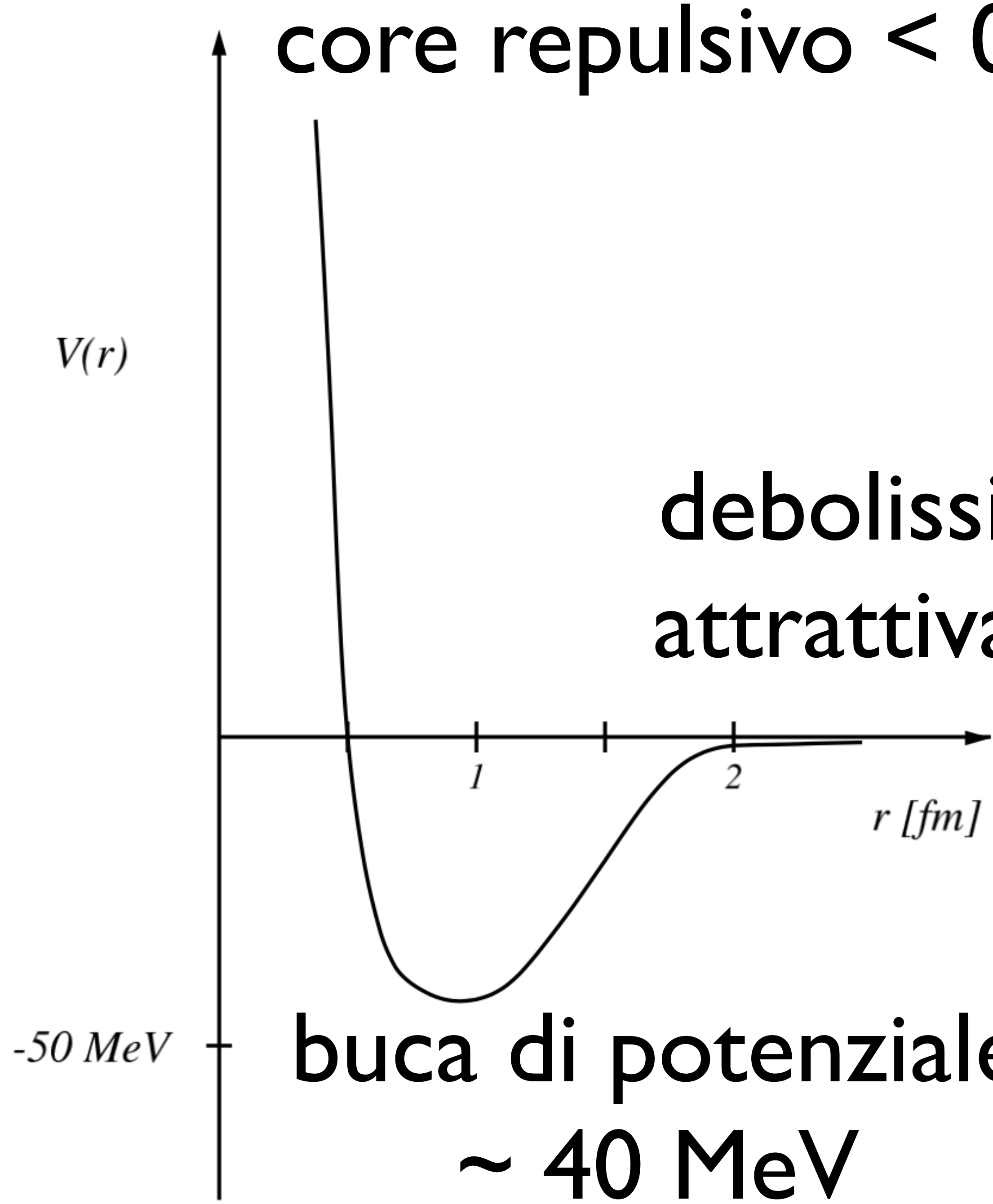
Big Bang | Stelle | Supernove

Energia di legame per nucleone



Potenziale nucleone-nucleone

core repulsivo < 0.5fm



debolissima forza attrattiva > 1.5fm

buca di potenziale ~ 40 MeV

Conseguenze per le proprietà del nucleo:

-Saturazione densità
-Termine di volume
-Nucleoni quasi liberi
-Buca di potenziale dovuta al campo medio degli altri nucleoni
-Nucleoni quasi-liberi
-Modello a gas di Fermi

Modello di nucleo a gas di Fermi

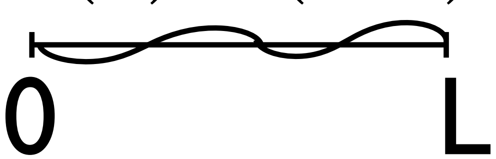
Introduzione del capitolo 17

17.1 Modello a nucleo di gas di Fermi
- -Densità degli stati
- -Momento di Fermi
- -Energia di Fermi
- -Gas di Fermi di neutroni e protoni
- -Energia di legame per nucleone
- -Energia cinetica totale del nucleo

Densità degli stati di particella libera

Condizione di periodicità onda piana

$\Psi(x)=\Psi(x+L)$



$\Psi(x)=V^{-1/2}e^{ik_x x}$ $\lambda_x=L/n$ $k_x=2\pi/\lambda_x=2\pi n_x/L$

<u>densità di stati per vettore d'onda = $dn_x/dk_x=L/2\pi$</u>

Principio di indeterminazione

Una particella $dn_x=1$ occupa nello spazio fasi (x,p_x) il volume

$(dx)(dp_x)\sim 2\pi\hbar$ $dx=L,\ dp_x=\hbar dk_x$ $dk_x\sim 2\pi/L$ <u>$dn_x/dk_x=2\pi/L$</u>

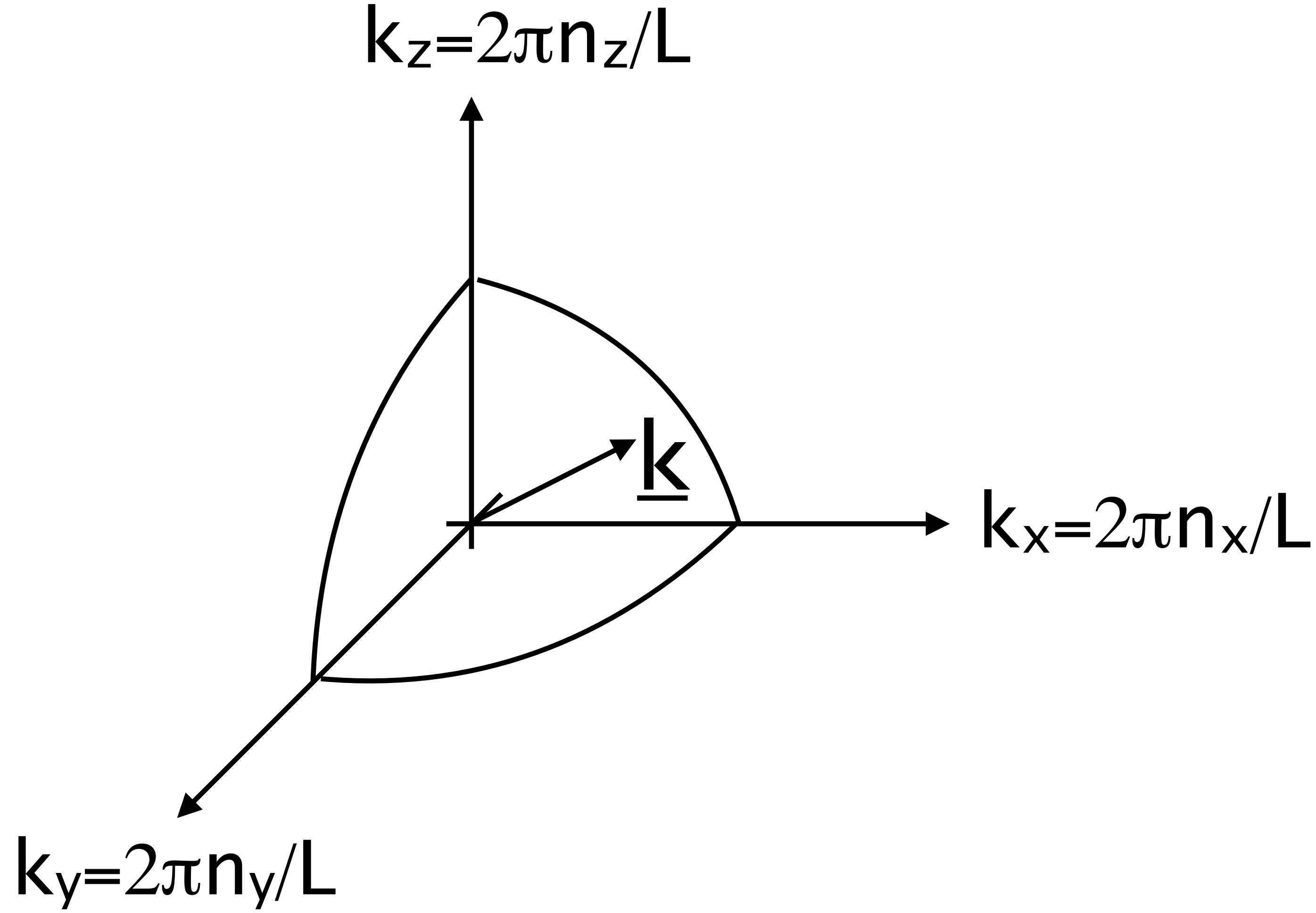
<u>densità di stati per vettore d'onda nello spazio= $d^3n/d^3k=V/(2\pi)^3$</u>

simmetria sferica $d^3k=4\pi k^2 dk$

densità di stati in simmetria sferica= $dn/dk=Vk^2/(2\pi^2)$

densità di stati in simmetria sferica per particelle di spin 1/2

$dn/dk=Vk^2/\pi^2$

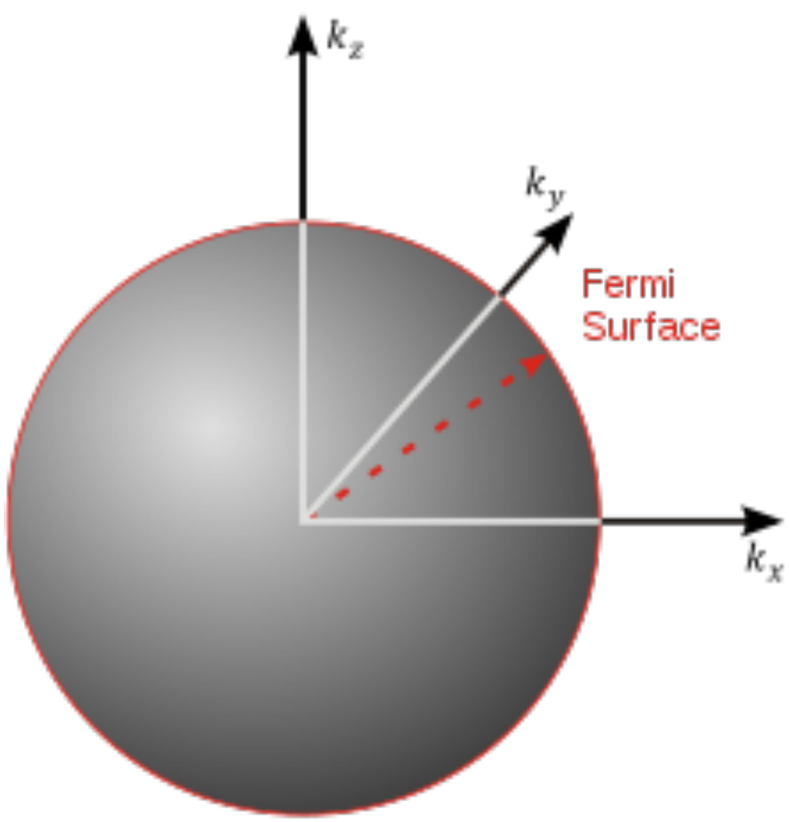


Sfera di Fermi

Spin 1/2

$d^3n/d^3k=2V/(2\pi)^3$

$d^3n=2V/(2\pi)^3 d^3k$



N/V=n(densità di particelle per unità di volume)=
$2/(2\pi)^3 \cdot$ Volume sfera di Fermi di raggio k_F
$=2/(2\pi)^3 \cdot 4/3\pi k_F^3=1/(3\pi^3)k_F^3$

$$\boxed{k_F=(3\pi^2 n)^{1/3}}$$

Il momento di Fermi $p_F=\hbar k_F$ e' l'ultimo stato occupato del gas libero di fermioni di spin 1/2, densità di volume n e nello stato fondamentale.

Onda piana di un fermione di spin 1/2 (pag 66 dispense)

$\Psi_{\underline{k},s}(\underline{x})=V^{-1/2}e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\chi_s$

$\chi_\uparrow=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ spin s=1/2

$\chi_\downarrow=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ spin s=-1/2

$\chi^*_{s'}\chi_s=\delta_{s's}$

$$<\Psi_{\underline{k'},s'}\Psi_{\underline{k},s}>=\mathit{Normalizzazione}\int d^3x V^{-1/2}e^{-i\underline{k'}\cdot\underline{x}}\chi^*_{s'}V^{-1/2}e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\chi_s$$

$$<\Psi_{\underline{k'},s'}\Psi_{\underline{k},s}>=\mathit{Normalizzazione}\int d^3x V^{-1}e^{-i(\underline{k}'-\underline{k})\cdot\underline{x}}\chi^*_{s'}\chi_s$$

$$<\Psi_{\underline{k'},s'}\Psi_{\underline{k},s}>=\mathit{Normalizzazione}\cdot V^{-1}(2\pi)^3\delta(\underline{k}'-\underline{k})\delta_{s's}$$

$\mathit{Normalizzazione}=V/(2\pi)^3$

$$\boxed{<\Phi\Psi>=V/(2\pi)^3\int d^3x\Phi^*(\underline{x})\Psi(\underline{x})}$$

Nello spazio delle coordinate

$$\boxed{<\Phi\Psi>=V/(2\pi)^3\int d^3k\Phi^*(\underline{k})\Psi(\underline{k})}$$

Anche nello spazio dei momenti

Se ho N fermioni nel volume V e nello stato fondamentale questi occuperanno gli stati di singola particella (onda piana) con numero d'onda e spin $\underline{k}$,s con s=+/-1/2 e $k<k_F$ affinchè il principio di esclusione di Pauli sia rispettato.

La densità di volume è la somma incoerente delle probabilità di trovare ogni singola particella di numeri quantico $\underline{k}$,s nell'unità di volume (onde piane ortogonali quindi nessuna interferenza quantistica).

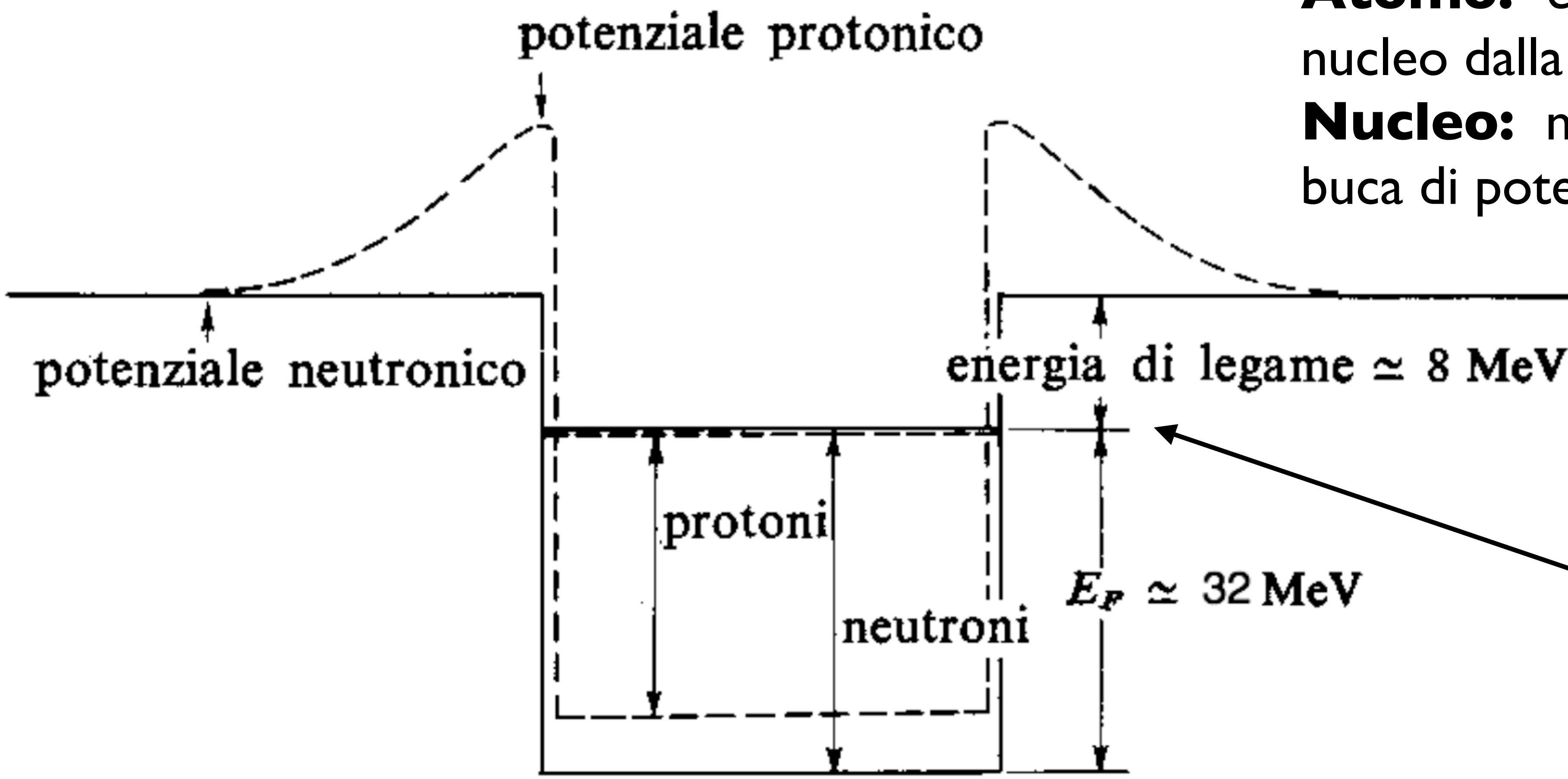
$$n=\sum_{\underline{k},s}|\Psi_{\underline{k},s}(\underline{x})|^2=2\sum_{\underline{k}}V^{-1}=$$

$$n=2V/(2\pi)^3 \int d^3k V^{-1}=2(2\pi)^{-3}(4/3\pi k_F^3)=1/(3\pi^2)k_F^3$$

$$\boxed{k_F=(3\pi^2 n)^{1/3}}$$

Modello a gas di Fermi di protoni e neutroni nel nucleo

Atomo: elettroni organizzati attorno al nucleo dalla forza coulombiana del nucleo.
Nucleo: nucleoni autoorganizzati in una buca di potenziale.



Stabilità rispetto decadimento beta

$|E_{Fn}-E_{Fp}|<m_e c^2$

Nel gas di Fermi E_F è riferita al vuoto nel nucleo al fondo della buca di potenziale nucleare per protoni e neutroni indipendentemente.

Modello a particelle indipendenti.

Energia cinetica totale del nucleo nel modello a gas di Fermi

$$\begin{cases} x=(N-Z)/2 \\ y=(N+Z)/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} N=x+y \\ Z=y-x \\ A=2y \end{cases}$$

$$x/y \sim o(1)$$

$$E_{KIN}(A,Z)=3/5Z\varepsilon_{Fp}+3/5N\varepsilon_{Fn}=3/5(\hbar^2/2M)(Zk_{Fp}^2+Nk_{Fn}^2)$$

$$E_{KIN}(A,Z)=3/10(\hbar^2/M)(Zk_{Fp}^2+Nk_{Fn}^2)$$

$$k_{Fp}=(3\pi^2\frac{Z}{V})^{1/3} \quad k_{Fn}=(3\pi^2\frac{N}{V})^{1/3}$$

$$V=4/3\pi R_0^3A$$

$$k_{Fp}=(9\pi\frac{Z}{4A})^{1/3} \quad k_{Fn}=(9\pi\frac{N}{4A})^{1/3}$$

$$E_{KIN}(A,Z)=3/10(\hbar^2/MR_0^2)(Zk_{Fp}^2+Nk_{Fn}^2)=3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/4)^{2/3}\frac{Z^{5/3}+N^{5/3}}{A^{2/3}}$$

$$= 3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}\frac{(y-x)^{5/3}+(x+y)^{5/3}}{y^{2/3}}$$

$$= 3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}y[(1-x/y)^{5/3}+(1+x/y)^{5/3}]$$

…bisogna sviluppare fino al II ordine

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$$

$$= 3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}$$

$$y[1-5/3x/y+5/3(5/3-1)/2(x/y)^2+1+5/3x/y+5/3(5/3-1)/2(x/y)^2]$$

$$=3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}y[2+5/3(5/3-1)(x/y)^2]$$

$$=3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}y[2+10/9(x/y)^2]$$

$$=3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}[A+5/9(N-Z)^2/A]$$

Energia totale del nucleo nel modello a gas di Fermi

$E_T(A,Z) = -BA + E_{KIN}(A,Z) =$ B=40MeV profondità buca di potenziale

$[-B + 3/10(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}]A +$ Termine di volume < 0

$1/6(\hbar^2/MR_0^2)(9\pi/8)^{2/3}(N-Z)^2/A$ Termine di asimmetria > 0

Libero cammino medio e principio di esclusione

- Cinetica media nucleoni nel nucleo = 33 MeV
- Sezione d'urto interazione nucleone-nucleone a 33 MeV
- $\sigma = \pi R_0^2 = \pi\,(1.2\text{fm})^2 \sim 4\text{fm}^2 = 0.4 \cdot 10^{-26}\ \text{cm}^2 = 40\ \text{mb}$
- Densità nucleare media $n = 0.13$ nucleoni/fm^3,
- Libero cammino medio classico = $1/(n\sigma)$ = $1/(0.13 \cdot 4)\text{fm} \sim 1.9$ fm quindi simile alla distanza media tra nucleoni nel nucleo (come una goccia classica!!!).

Modello a particelle indipendenti salvato dal principio di esclusione di Pauli:

La collisione ridistribuisce l'energia tra i nuclei ma quello che riduce la sua energia dovrebbe finire in un livello già occupato e ciò non è possibile per il principio di esclusione di Pauli.

Modello di nucleo a shell

17.3 Il modello a shell

- -Introduzione
- -I numeri magici
- -Autostati del potenziale nucleare
- -L'accoppiamento spin-orbita
- -Stati con una particella (un buco) in una shell (in una shell piena)
- -Momenti magnetici del nucleo da NON FARE

Numeri magici del nucleo

$\boxed{2,8,10,20,28,50,82,126}$

1. I nuclei con un Z magico hanno tanti isotopi, i nuclei con un N magico hanno tanti isotoni
2. Energia di cattura di un nucleone da parte di un nucleo è bassa se diventa un nucleo non più magico è alta se diventa magico
3. Le famiglie radioattive naturali finiscono con il nucleo doppio magico $^{208}_{82}Pb_{126}$

Energie di legame per cattura di neutroni o protoni e numeri magici

Energia di legame per cattura di n o p per ottenere un nucleo magico

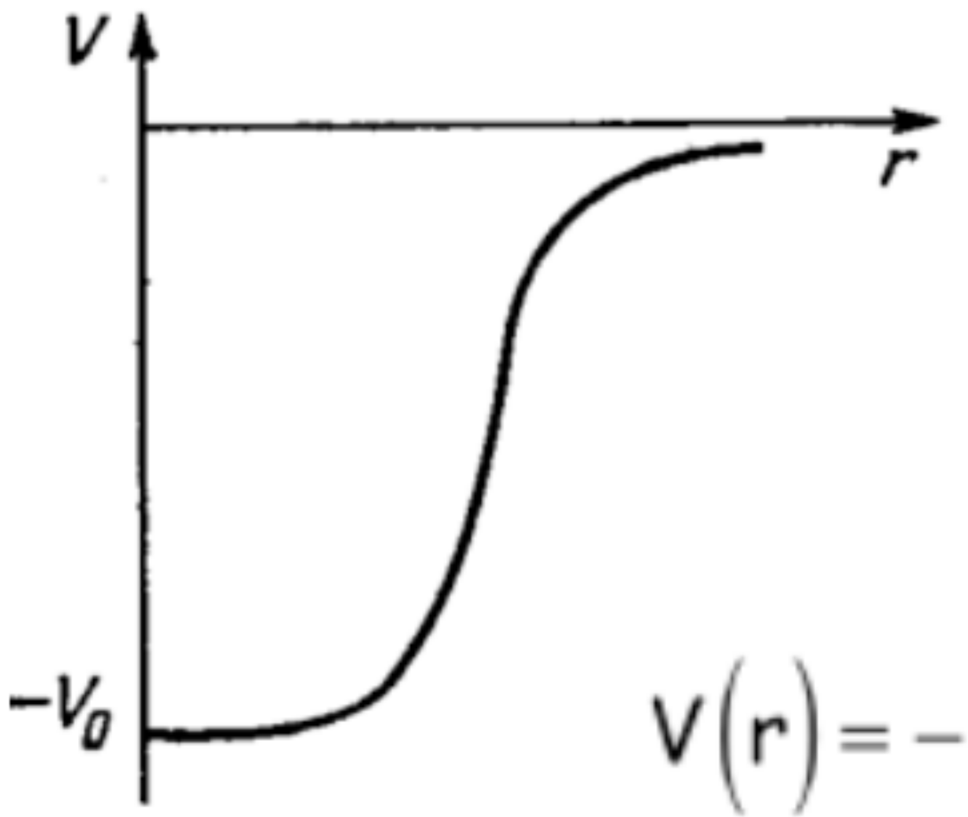
$^{15}O + n \rightarrow {}^{16}O$	$B_n = 15.663$ MeV	$^{3}He + n \rightarrow {}^{4}He$	$B_n = 20.577$ MeV
$^{15}N + p \rightarrow {}^{16}O$	$B_p = 12.127$ MeV	$^{3}H + p \rightarrow {}^{4}He$	$B_p = 12.127$ MeV

$^{16}O + n \rightarrow {}^{17}O$	$B_n = 4.143$ MeV	$^{4}He + n \rightarrow {}^{5}He$	$B_n = 0.890$ MeV
$^{16}O + p \rightarrow {}^{17}F$	$B_n = 0.603$ MeV	$^{4}He + p \rightarrow {}^{5}Li$	$B_p = 1.965$ MeV

Energia di legame per cattura di n o p da parte di un nucleo magico

Analogo alle energie di ionizzazione o cattura elettronica di gas nobili e alcalini

Potenziale medio nucleare



$$V_{tot}(r) = V(r) + U(r)\,\ell \cdot s/\hbar^2$$

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

Potenziale Wood-Saxon

Rompe degenerazione oscillatore armonico
L più alti energia più bassa

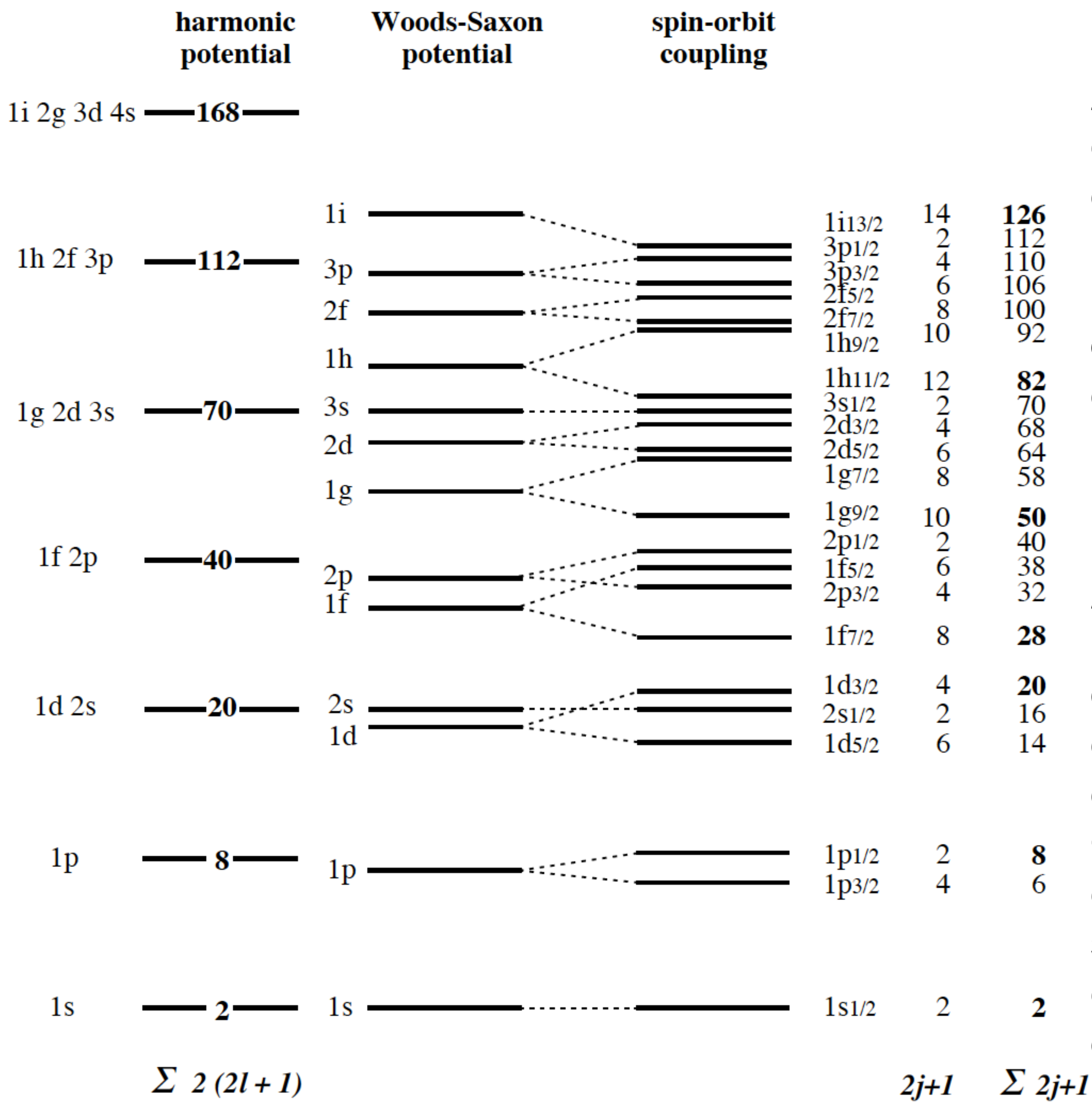
$$\propto \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

Spin-orbita

Sposta i J=L+1/2 verso il basso al punto tale che dal quarto guscio in poi finiscono nel guscio sottostante

1949 Goeppert-Mayer e Jensen: prevedono tutti i numeri magici

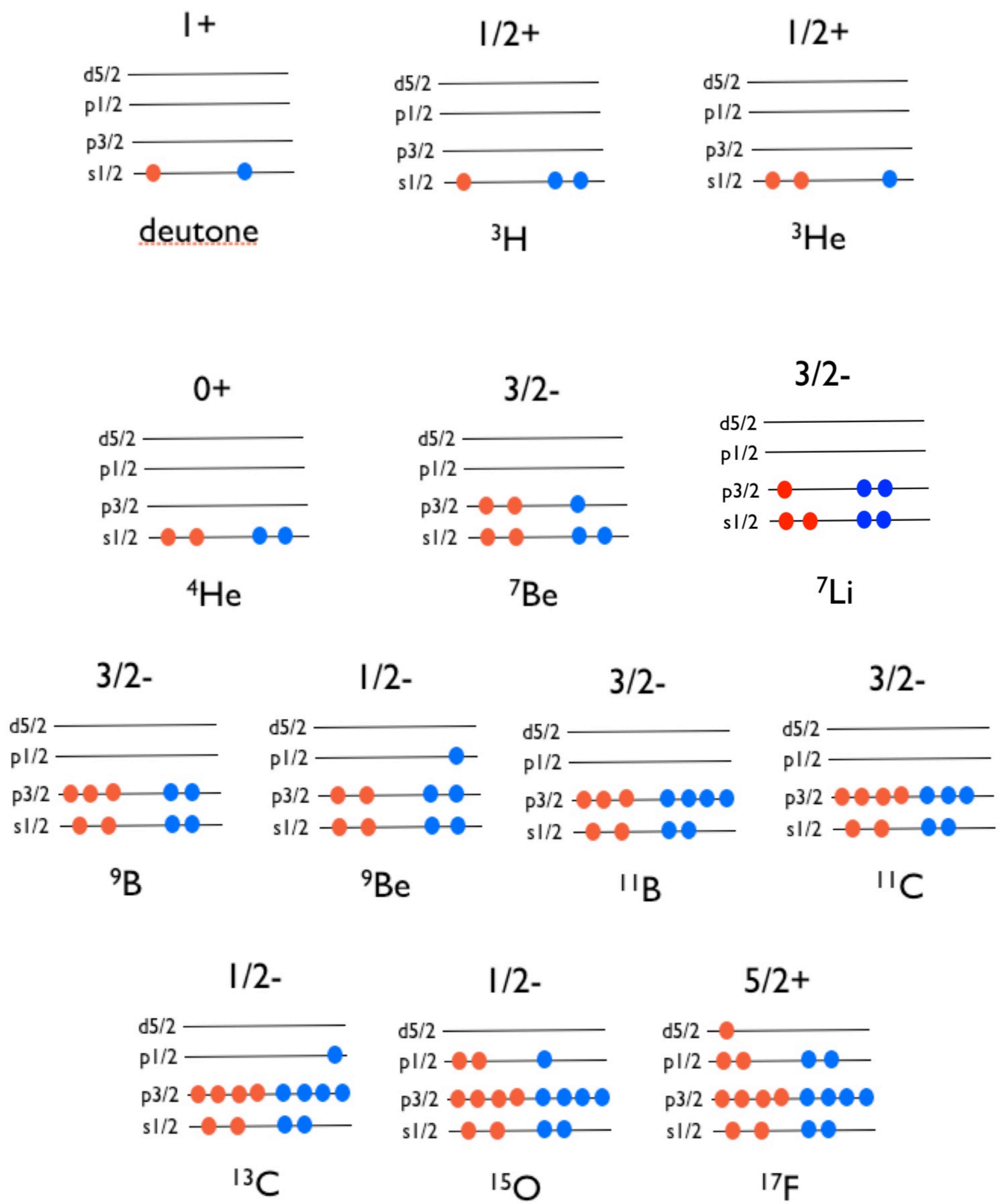
Le shell: gruppi di livelli energetici molto vicini



I numeri magici per gli atomi sono 2, 10, 18, 36, 54 e 86, corrispondenti al numero totale di elettroni in gusci elettronici pieni (gas nobili non reattivi).
Gli elettroni all'interno di un guscio hanno energie molto simili e si trovano a distanze simili dal nucleo.

I numeri magici per i nuclei sono 2, 8, 10, 20, 28, 50, 82 e 126. Nei nuclei, questa stabilità si verifica quando c'è un grande intervallo di energia tra una serie di livelli pieni ed il livello successivo vuoto.
Questi gusci non sono così chiaramente collegati alla struttura spaziale del nucleo come invece lo sono i gusci degli elettroni alle orbite atomiche.

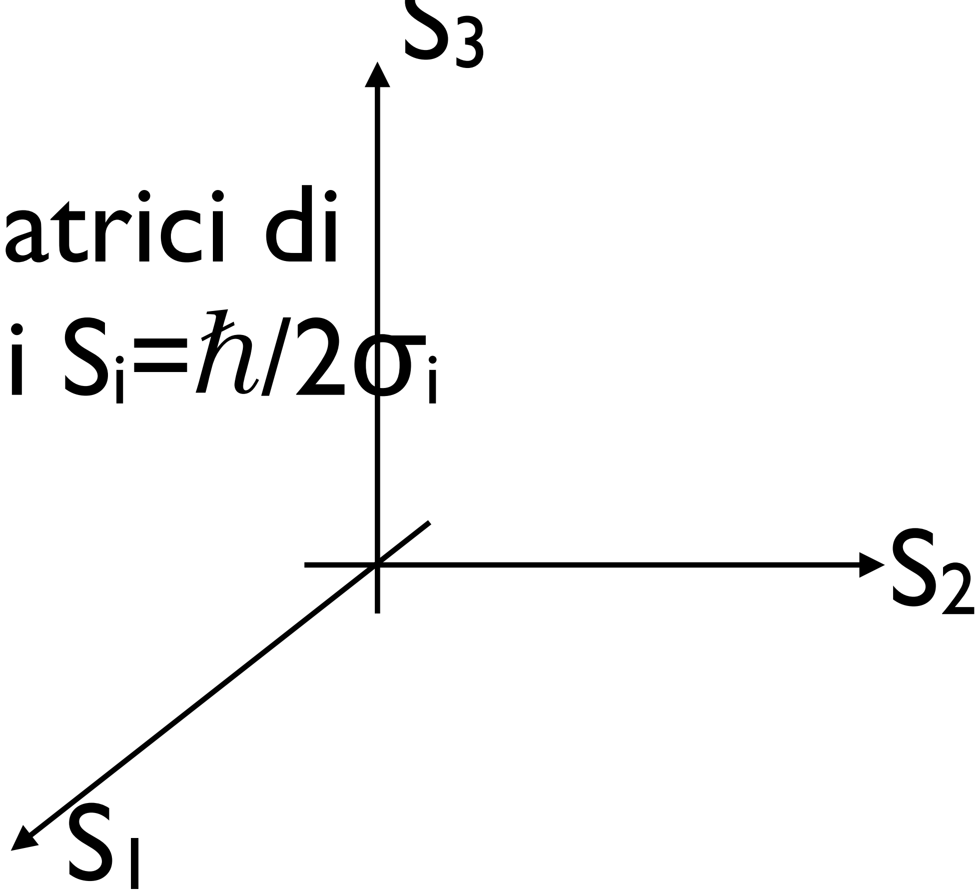
Le shell: Ground state nuclei con piccoli A



Indipendenza dalla carica delle forze nucleari

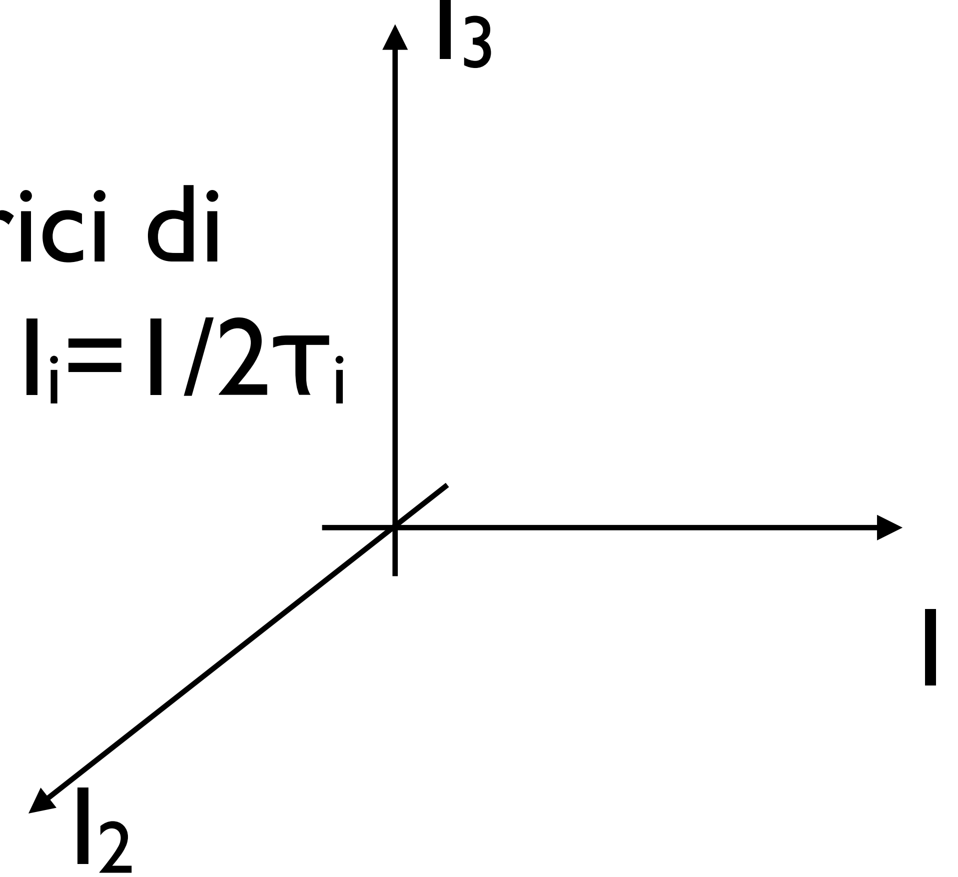
2.4 Indipendenza dalla carica delle forze nucleari

Spin e Isospin



Matrici di
Pauli $S_i=\hbar/2\sigma_i$

Matrici di
Isospin $I_i=1/2\tau_i$



Doppietto di spin
spin up=$|\uparrow\rangle$
spin down=$|\downarrow\rangle$

Doppietto di isospin
protone =$|p\rangle$
neutrone=$|n\rangle$

Lo spin si somma con altri spin e momenti angolari orbitali, mentre l'isospin si combina solo con altri isospin.

$$I_3^{nucleo}=\sum I_3^{nucleoni}=(Z-N)/2$$

Simmetria di Isospin (Heisenberg)

Funzione d'onda nucleone-nucleone $\Psi_{12} = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi_S(s_1, s_2)\chi_I(I_1, I_2)$

Simmetrico

total spin $S = 1$

$$\chi_S(s_1, s_2) = (\uparrow\uparrow), \quad S_z = +1$$
$$\chi_S(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \quad S_z = 0$$
$$\chi_S(s_1, s_2) = (\downarrow\downarrow), \quad S_z = -1$$

total isospin $I = 1$

$$\chi_I(I_1, I_2) = (p\,p), \quad I_3 = +1$$
$$\chi_I(I_1, I_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\,n + n\,p), \quad I_3 = 0$$
$$\chi_I(I_1, I_2) = (n, n), \quad I_3 = -1,$$

AntiSimmetrico

total spin $S = 0$

$$\chi_S(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

total isospin $I = 0$

$$\chi_I(I_1, I_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\,n - n\,p)$$

La forza nucleare nucleone-nucleone è invariante per rotazioni spaziali e isospin e quindi dipende solo da J=L+S e I e non da J_3 e I_3.

Principio di esclusione di Pauli ed isospin

L'isospin permette di estendere il principio di esclusione di Pauli all'insieme dei nucleoni considerando p e n fermioni indistinguibili (per la forza nucleare).

Se S=1 (simmetrico) allora I=0 (antisimmetrico)
Se S=0 (antisimmetrico) allora I=1 (simmetrico)

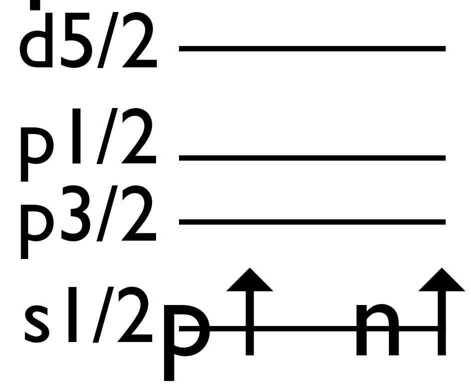
Vedi deutone, ^{6}Li e ^{14}N nelle prossime slide

A=2

Un solo stato: il deutone.

E' un singoletto di isospin e non ha nessun stato eccitato

deutone

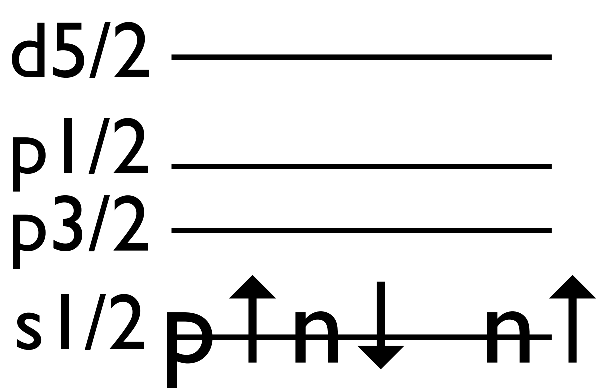


$J=1^+, I=0, I_3=0$

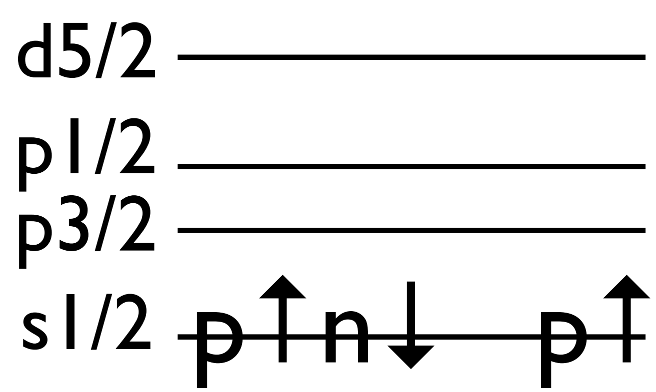
A=3

Due stati : $^3H = ^3T$ e ^3He. Doppietto di isospin

$I_3=-1/2$ $I_3=1/2$



^3H



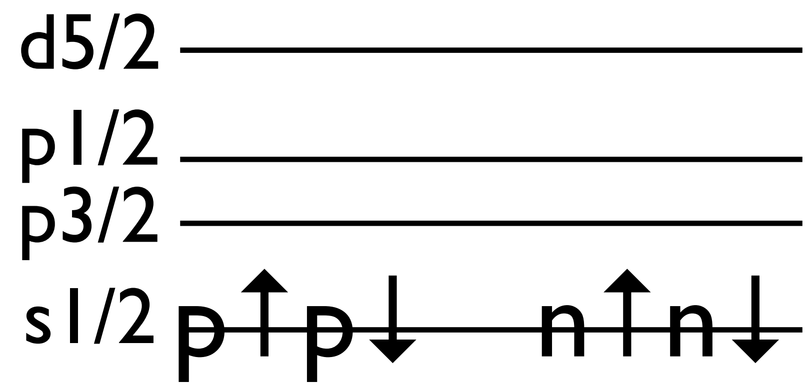
^3He

$J=1/2^+, I=1/2$

A=4

Un solo stato: ^{4}He. Singoletto di isospin particolarmente stabile con energia di legame 28.3 MeV (radiazione alfa)

^{4}He



$J=0^+$, $I=0$, $I_3=0$

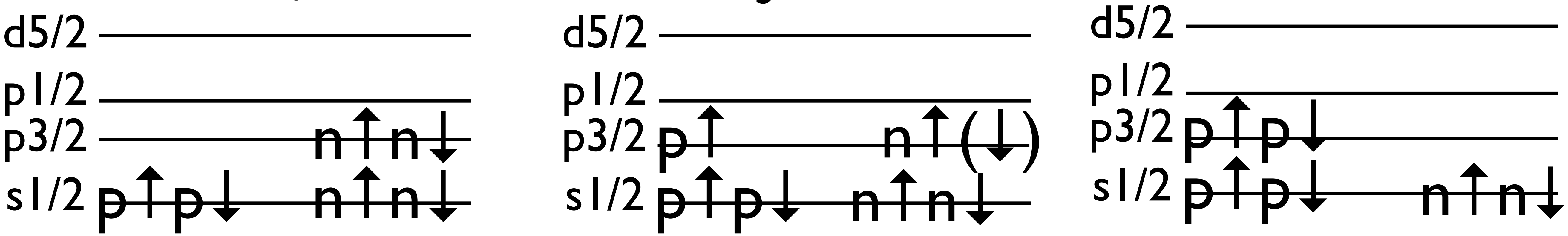
NB: Sono 4 nucleoni ben legati tra loro e e non 2 come il deutone

A=5

Nessun stato stabile

A=6 Tripletto di isospin + singoletto di isospin

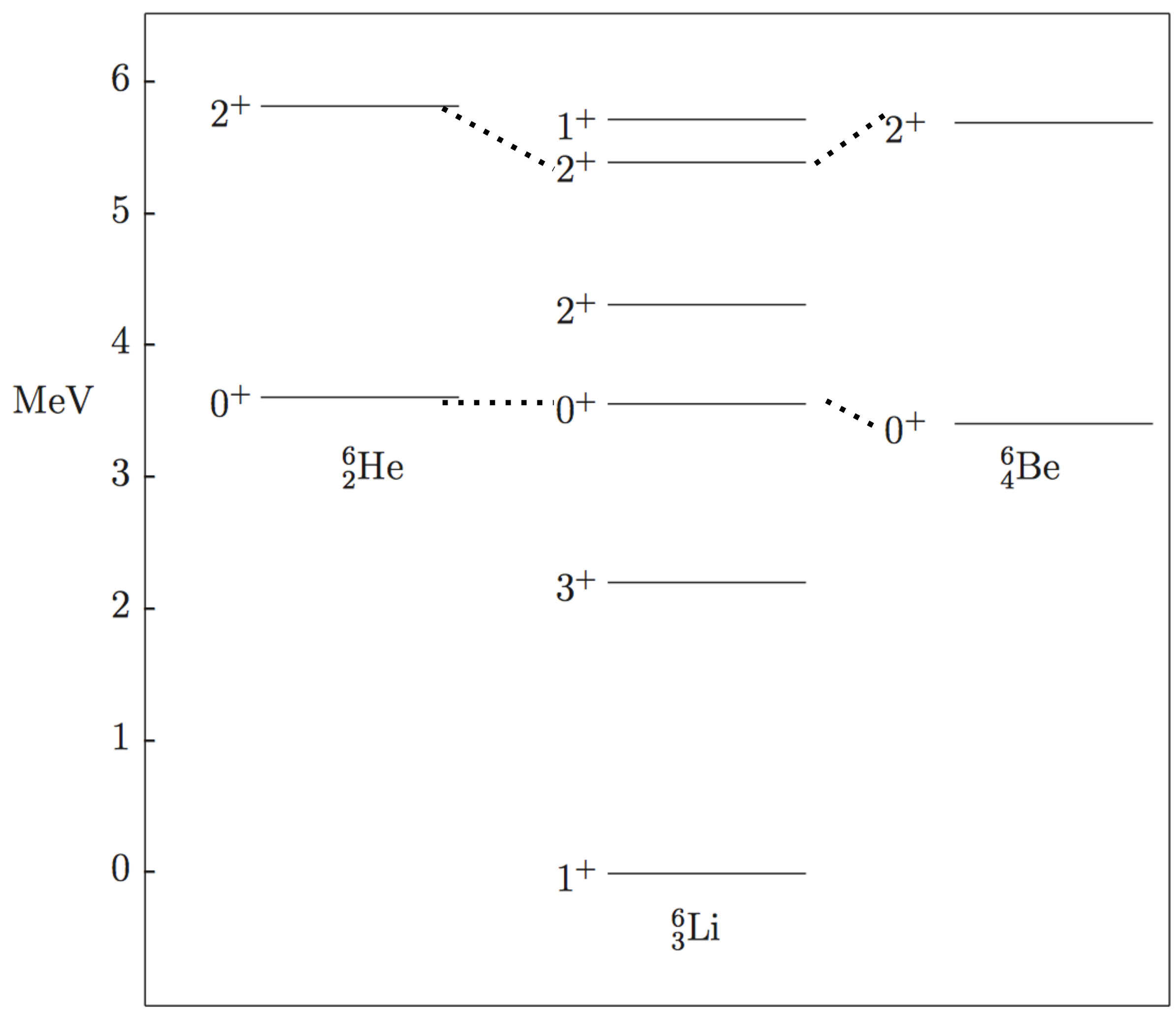
$I_3=-1$ $I_3=0$ $I_3=1$



^6He $J=0^+, I=1$

^6Li $J=1(0)^+, I=0,1$

^6Be $J=0^+, I=1$

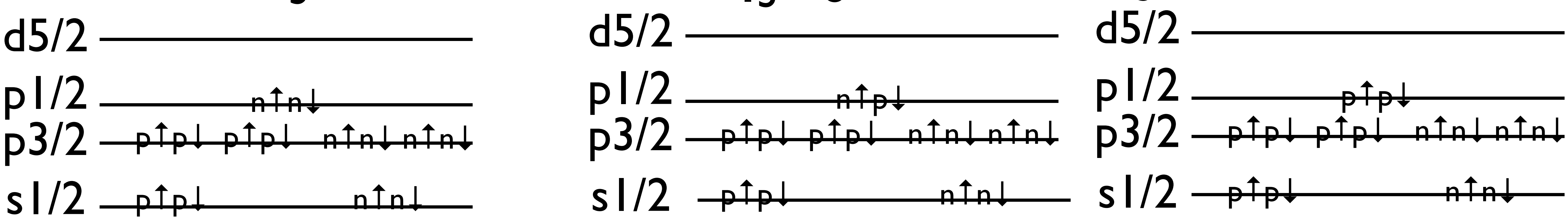


^6Li è una sovrapposizione di un tripletto e di un singoletto di isospin entrambi con $I_3=0$.

$J=0^+$ per $I=1$
$J=1^+$ per $I=0$

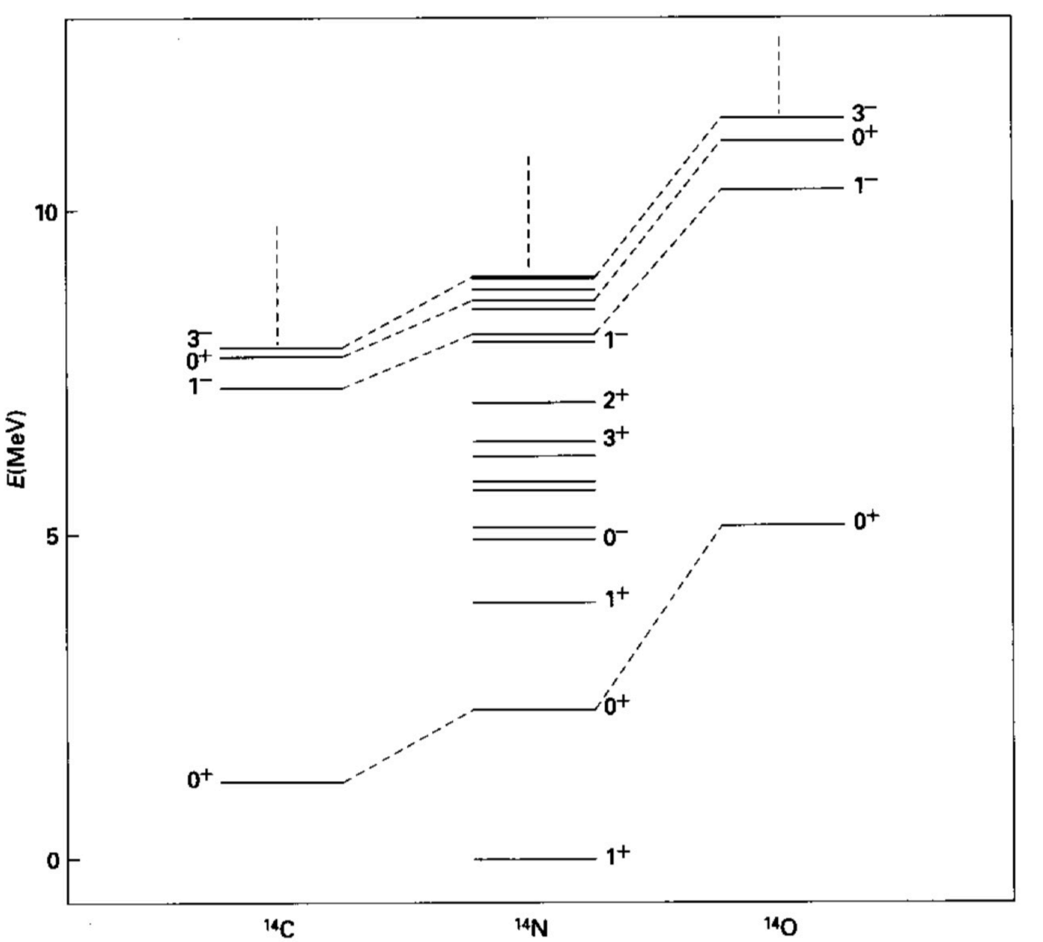
A=14 Tripletto di isospin + singoletto di isospin

$I_3=-1$ $I_3=0$ $I_3=1$



^{14}C ^{14}N ^{14}O

$J=0^+, I=1$ $J=1(0)^+, I=0,1$ $J=0^+, I=1$



tripletti isobarici nei nuclei $^{14}_{6}C$, $^{14}_{7}N$, $^{14}_{8}O$

^{14}N è una sovrapposizione di un tripletto e di un singoletto di isospin entrambi con $I_3=0$.

$J=0^+$ per $I=1$

$J=1^+$ per $I=0$

Decadimento gamma

In ordine:

18.1 Transizioni elettromagnetiche
-transizioni di dipolo elettrico
.transizioni multipolari elettriche e magnetiche

3.4 Decadimenti di stati nucleari eccitati
-decadimenti elettromagnetici
-gli stati del continuo

Interazione particella-campo

$$H_{int}=J^{\mu}A_{\mu}$$

la perturbazione è del tipo corrente x campo: vale per forze em, weak, strong

Nel caso elettromagnetico (em):

$$j=(qc,q\underline{v})=(qc,q/m\underline{p})$$

$$A=(\varphi/c,\underline{A})$$

$$H_{int}=q\varphi-q/m\underline{p}\cdot\underline{A}\sim-q/m\underline{p}\cdot\underline{A}$$

il potenziale elettrico φ non descrive fotoni reali ma virtuali e lo trascuriamo mentre il potenziale vettore $\underline{A}$ lo interpretiamo come funzione d'onda del fotone.

Regola d'oro di Fermi

$$H=H_0+H_{int}=p^2/2m+V+H_{int}$$

ψ funzione d'onda del sistema imperturbato H_0
H_{int} è la perturbazione

$$\dot{P}=dP/dt= w(E)= \frac{2\pi}{\hbar}|<\psi_f|H_{int}|\psi_i>|^2 \frac{dn}{dE}(E)$$

Probabilità di transizione nell'unità di tempo

Densità degli stati per unità di energia

Densità degli stati di un fotone

Fattore 2 dallo stato di polarizzazione del fotone

$$d^3n/d^3k=2V/(2\pi)^3$$

$$dn=2V/(2\pi)^3 d\Omega k^2 dk=2V/(2\pi\hbar c)^3 d\Omega E^2 dE$$

$$dn/dE=E^2 2V/(2\pi\hbar c)^3 d\Omega$$

$d\Omega$ è l'angolo solido elementare attorno il $\underline{k}$ del fotone

$$\underline{x}H_0-H_0\underline{x}=i\hbar\underline{v}=i\hbar\underline{p}/m$$ perchè x coniugata a v

$$H_{int}=-q/m\underline{p}\cdot\underline{A}=iq/\hbar(\underline{x}H_0-H_0\underline{x})\cdot\underline{A}$$

$$<\psi_f|H_{int}|\psi_i>=iq/\hbar<\psi_f|\underline{x}H_0-H_0\underline{x}|\psi_i>\cdot\underline{A}=iq/\hbar(E_i-E_f)<\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i>$$

$$<\psi_f|H_{int}|\psi_i>=iq/\hbar E<\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i>$$ $E=E_i-E_f$ =energia del fotone

$$w(E)=\frac{2\pi}{\hbar}|<\psi_f|H_{int}|\psi_i>|^2\frac{dn}{dE}(E)=$$
$$\frac{2\pi}{\hbar}q^2/\hbar^2E^2|<\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i>|^2 2V/(2\pi\hbar c)^3 d\Omega E^2$$

$$\boxed{w(E)=\frac{2\pi q^2E^4 2V}{\hbar^3(2\pi\hbar c)^3}|<\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i>|^2 d\Omega}$$

Funzione d'onda del fotone nell'approssimazione semiclassica

$\underline{A}(\underline{x},t)$ vettore d'onda reale

$$\underline{A}(\underline{x},t)=\hat{\varepsilon}\left(a_{\underline{k}}e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}+a^*_{\underline{k}}e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}\right)$$

Assorbimento, energia negativa, propaga "in dietro" nel tempo

Emissione, energia positiva, propaga "in avanti nel tempo"

$\hat{\varepsilon}$=vettore di polarizzazione ortogonale a $\underline{k}$ $\varepsilon\cdot\underline{k}=0$

$\underline{p}=\hbar\underline{k}$ $E=\hbar\omega$ $E=pc$ $\omega=kc$

energie positive e negative nascono dall'equazione delle onde (derivata temporale al secondo ordine)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right]\underline{A}(x,y,z,t)=0$$

o dalla relazione relativistica dell'energia $E=\sqrt{p^2c^2}=\pm pc$

cosi' come energie solo positive della particella di massa m nascono dall'equazione di Schrodinger (derivata temporale solo al primo ordine)

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\psi(x,y,z,t)=0$$

o dalla relazione classica dell'energia $E=p^2/2m$

infatti nel passaggio da meccanica classica a quantistica vale la corrispondenza tra grandezze cinematiche e operatori:

$$E\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \underline{p}\rightarrow -i\hbar\underline{\nabla}$$

Normalizzazione funzione d'onda fotone

Il fotone è un quanto di energia $\hbar\omega$ che occupa il volume V

$$\text{densità di energia} = \frac{\hbar\omega}{V} = \frac{\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t}{2} + \frac{\langle B^2 \rangle_t}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t$$

dove con $\langle \ldots \rangle_t$ si intende la media temporale e densità di energia elettrica e magnetica sono in media uguali.

$$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{A}(\underline{x},t)=|a_{\underline{k}}|\hat{\mathcal{E}}(e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t-\alpha)}+e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t-\alpha)})=2|a_{\underline{k}}|\hat{\mathcal{E}}\cos(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t-\alpha)$$

$$\underline{E}=-\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}=2\omega|a_{\underline{k}}|\hat{\mathcal{E}}\sin(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t-\alpha)$$

$$E^2=4\omega^2|a_{\underline{k}}|^2\sin^2(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t-\alpha)$$

Il valore medio di un $\sin^2$ o $\cos^2$ e' 1/2 quindi

$$\frac{\hbar\omega}{V}=2\mathcal{E}_0\omega^2|a_k|^2$$

e la normalizzazione della funzione d'onda del fotone vale

$$|a_k|^2=\frac{\hbar}{2\mathcal{E}_0\omega V}=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{E}_0 EV}$$

e possiamo assumere fase nulla $\alpha=0$

$$\underline{A}(\underline{x},t)=\frac{\hbar}{[2\mathcal{E}_0 EV]^{1/2}}\hat{\mathcal{E}}(e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}+e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)})$$

$$\langle\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i\rangle=\frac{\hbar}{[2\varepsilon_0 EV]^{1/2}}\langle\psi_f|\underline{x}\cdot\hat{\varepsilon}\,(e^{-i(k\cdot x-\omega t)}+e^{i(k\cdot x-\omega t)})|\psi_i\rangle$$

Assorbimento
fotone di energia $\hbar\omega$

Emissione
fotone di energia $\hbar\omega$

Consideriamo solo emissione, assorbimento e' equivalente

$$|\langle\psi_f|\underline{x}\cdot\underline{A}|\psi_i\rangle|^2=\frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0 EV}|\langle\psi_f|\underline{x}\cdot\varepsilon e^{ik\cdot x}|\psi_i\rangle|^2$$

Sviluppo in multipoli elettrici e magnetici

Dipolo elettrico E1

Quadrupolo magnetico M2 +
Ottupolo elettrico E3

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} - \frac{(\vec{k}\cdot\vec{r})^2}{2} + \ldots$$

Dipolo magnetico M1 (parte antisimmetrica $k_i x_j - k_j x_i$) +
Quadrupolo elettrico E2 (parte simmetrica $k_i x_j + k_j x_i$)

Sia nel sistema atomico che nucleare e' giustificata l'espansione multipolare del campo elettromagnetico

$kR \sim E/\hbar c R \sim 1\text{MeV}/(200\text{MeVfm}) * 1.2\text{fm}A^{1/3} \sim 6 \cdot 10^{-3} A^{1/3}$

Regole di selezione

Separando la parte radiale e angolare nell'elemento di matrice di transizione

$$\psi_{l,m}(r,\theta,\phi)=u(r)Y(\theta,\phi)_{l,m}$$

$$<\psi_f\ |\underbrace{\underline{\mathcal{E}}\cdot\underline{x}e^{i\underline{kx}}}|\psi_i>$$

Parte angolare

$$\int Y^*(\theta,\varphi)_{lf,mf}\, Y^*(\theta,\varphi)_{l,m} Y(\theta,\varphi)_{li,mi} d\varphi \sin\theta d\theta$$

Integrando sugli angoli si ottengono le seguenti regole di selezione

$$||li-lf|\leq l\leq ||li+lf| \quad \text{ma non } li=lf=0 \qquad m=mi-mf$$

Ad esempio per il dipolo $<\psi_f\ |\underline{\mathcal{E}}\cdot\underline{x}|\psi_i>$ $l=1$

La parità del fotone di multipolarità l e' data da $(-1)^l$ per la transizione elettrica $(-1)^{l+1}$ per quella magnetica.

Gerarchia dei termini di emissione

Ogni termine dello sviluppo multipolare (ad eccezione del primo) viene separato in una parte antisimmetrica $k_i x_j - k_j x_i$ ed in una parte simmetrica $k_i x_j + k_j x_i$. La parte antisimmetrica $k_i x_j - k_j x_i$ è il momento angolare $\underline{L}=\underline{x} \wedge \hbar \underline{k}$ e quindi il momento magnetico $\underline{\mu}=q/2m\ \underline{x} \wedge \hbar \underline{k}$.

Questo spiega perchè l'ordine dei multipoli magnetici è inferiore di una unità rispetto all'ordine del termine dello sviluppo da cui hanno origine.

La probabilità di transizione è così gerarchicamente ordinata:
E1<M1, E2<M2,E3<…<M(l-1),El<…

Ogni termine dello sviluppo introduce un fattore aggiuntivo $k^{(l-1)}$ e quindi una dipendenza dall'energia E^{l-1} che diventa $E^{2(l-1)}$ in termini di probabilità di transizine che in aggiunta a E^3 del dipolo elettrico da una dipendenza $(\text{Energia})^{2l+1}$ per ogni transizione multipolare elettrica e magnetica.

Momento magnetico di una particella

$$\underline{\mu}=q/2m\ (\underline{L}+g\underline{S})$$

$g_e \sim 2$ elettrone
$g_p \sim 2.7$ protone
$g_n \sim -3.8$ neutrone (q=0 ma g no perchè costituito da quark carichi)

protone = uud   u=quark up di carica +2/3
neutrone = udd   d=quark down di carica -1/3

$\binom{u}{d}$ doppietto di isospin

Decadimento beta

3. Introduzione
3.1 Il decadimento beta
  - nei nuclei dispari
  - nei nuclei pari
  - cattura elettronica
  - il caso del potassio 40
15.5 SOLO vita media del neutrone (regola di Sargent)
17.6 Decadimento beta del nucleo
  - l'elemento di matrice
  - decadimento di Fermi e Gamow-Teller
  - regole di transizione
  - decadimenti super-permessi, permessi e proibiti

Vita media e frazioni di decadimento

<u>La vita media e' una sola τ</u> ed il suo inverso $\lambda=1/\tau$ e' la probabilità di decadere in un secondo.

Le frazioni di decadimento (braching ratio i-esimo BR_i) possono essere più di una e si sommano a 1.

$$\lambda=1/\tau$$

$$\sum_{figlio} BR_{figlio}=1$$

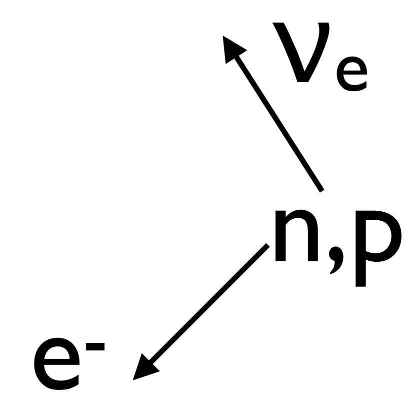
$$\underline{N_{padre}(t)=N_{padre}(0)e^{-\lambda t}}$$

$$N_{figlio}(t)=BR_{figlio}[N_{padre}(0)-N_{padre}(t)]$$

$$\underline{N_{figlio}(t)=BR_{figlio}N_{padre}(0)(1-e^{-\lambda t})}$$

Decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$



Decadimento a tre corpi.
Neutrone fermo.
Rinculo del protone si trascura.
La massa dell'elettrone si trascura.
La massa del neutrino e' nulla.

$$E_0 = (m_n - m_p)c^2 = E_e + E_\nu = 1.3\,\mathrm{MeV}$$
$$dE_\nu = -dE_e$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{m_e c^2}^{E_0} |\langle pe\nu | H_w | n \rangle|^2 \frac{dn}{dE_e}(E_e)\, dE_e$$

Vita media del neutrone

Densità degli stati integrata su tutte le possibili energie finali

Densità degli stati di un sistema a due corpi

Elettrone e neutrino hanno un orientamento indipendente.

$\int d\Omega_e \; d\Omega_\nu = (4\pi)^2$.

No fattore 2x2 degli spin perchè fissati dal decadimento.

Massa trascurata E=pc.

$$dn = E_e^2 V/(2\pi\hbar c)^3 d\Omega_e \; E_\nu^2 V/(2\pi\hbar c)^3 d\Omega_\nu$$
$$= (4\pi V)^2/(2\pi\hbar c)^6 E_e^2 dE_e \; E_\nu^2 dE_\nu$$

$$\frac{dn}{dE_e} = (4\pi V)^2/(2\pi\hbar c)^6 E_e^2 E_\nu^2 dE_\nu = (4\pi V)^2/(2\pi\hbar c)^6 E_e^2 (E_0 - E_e)^2 dE_e$$

$$\int_{m_e c^2}^{E_0} \frac{dn}{dE_e} dE_e = (4\pi V)^2/(2\pi\hbar c)^6 \int_{m_e c^2}^{E_0} E_e^2 (E_0 - E_e)^2 dE_e$$

$x=E_e/(m_ec^2)$

$$\int_{m_ec^2}^{E_0}\frac{dn}{dE_e}dE_e=(4\pi V)^2/(2\pi\hbar c)^6\, m_e^5\int_1^{E_0/m_e} x^2(E_0/(m_ec^2)-x)^2dx$$

$y=E_0/(m_ec^2)>>1$

$$\int_1^y x^2(y-x)^2dx=x^3/3(y-x)^2|_1^y-\int_1^y x^3/3(-2)(y-x)dx\sim 2/3\int_1^y x^3(y-x)dx$$

$$=2/3\int_1^y x^3y\,dx-2/3\int_1^y x^4dx\sim 2/12y^5-2/15y^5=1/30y^5$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{2\pi}{\hbar}\int_0^{E_0}|M_{fi}|^2\frac{dn}{dE_e}(E_e)\,dE_e=\frac{V^2|M_{fi}|^2}{\hbar^7c^6}\frac{2^5\pi^3}{2^6\pi^6}\frac{E_0^5}{30}$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{V^2|M_{fi}|^2}{\hbar^7c^6}\frac{E_0^5}{60\pi^3}$$ Regola di Sargent $\tau\sim E_0^{-5}$

Elemento di matrice (1)

$$<pe\nu|H_w|n> = V/(2\pi)^3 \int d^3x \, \frac{e^{-i\underline{k}_p \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_e \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_\nu \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{i\underline{k}_n \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} H_w$$

Normalizzazione integrale su onde piane

$$e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \sim 1 + i\underline{k} \cdot \underline{x} - (\underline{k} \cdot \underline{x})^2/2 + \ldots \sim 1$$

espansione in $kR \ll 1$

termini $(kx)^L$ sono soppressi come 10^{-2L} e corrispondono a transizioni con momento angolare L.

L=0 transizioni permesse, L>0 transizione L-volte proibite

Elemento di matrice (2)

$$<pe\nu|H_w|n>=V/(2\pi)^3 \int d^3x \, \frac{e^{-i\underline{k}_p \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_e \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_\nu \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{i\underline{k}_n \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} H_w$$

Normalizzazione integrale su onde piane

Assumendo H_w costante l'integrale risulta $(2\pi)^3\delta(\underline{k}_n=\underline{k}_p+\underline{k}_e+\underline{k}_\nu)=0$

Otteniamo conservazione del momento $\underline{k}_n=\underline{k}_p+\underline{k}_e+\underline{k}_\nu$

$$<pe\nu|H_w|n>=M_{fi}=H_w/V \qquad |M_{fi}|^2=H_w^2/V^2$$

$|M_{fi}|^2$ è proporzionale a V^2 perchè deve semplificarsi con V^2 della densità degli stati e la vita media non può dipendere da V.

Transizioni di F e di G-T

Accoppiamento vettoriale (come forza elettromagnetica) (non flippa lo spin del nucleone e quindi elettrone e neutrino singoletto di spin S=0)

Accoppiamento assiale (non c'e' analogia con altre forze, tipico della forza debole) (flippa lo spin del nucleone e quindi elettrone e neutrino tripletto di spin S=1)

Transizioni di Fermi

Transizioni di Gamow-Teller

$$|M_{fi}|^2 = \frac{g_V^2+3g_a^2}{V^2} = (\hbar c)^6 G_F^2 \frac{c_V^2+3c_a^2}{V^2}$$

$c_V=1$

Universale

Conservazione di Q (carica em)

$c_a\sim-1$

Dipende dal processo

Partially Conserved Axial Current (PCAC)

$g_V=(\hbar c)^3 G_F$

Costante di Fermi

$G_F\sim10^{-5}\text{GeV}^{-2}$

Vita media del neutrone

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{G_F^2}{\hbar}\frac{E_0^5}{60\pi^3}\,(c_V^2+3c_a^2) \qquad c_a \sim -1.25$$

Decadimento neutrone è una transizione mista di Fermi e Gamow-Teller

$s=1/2^+ \rightarrow 1/2^+$ Può essere ottenuta sia con S=0 che S=1

$$\tau_n \sim \hbar \frac{10^{10}\,GeV^4\; 60\pi^3}{1.3^5\,MeV^5\,5.7} \sim 6.6 \cdot 10^{-25}\,GeV \cdot s \,\frac{10^{10}\,GeV^4\,60\pi^3}{3.7 \cdot 5.7 \cdot 10^{-15}\,GeV^5}$$

$$\sim 6.6 \cdot \pi^3 / 3.7 / 5.7\,min \sim 9.6\;min \qquad \boxed{\tau_n = 14.8\,min}$$

m_e non trascurabile per neutron-decay

Modello a quark dei nucleoni

I nucleoni sono costituiti da quark up (u) e down(d) di carica +2/3 e -1/3 rispettivamente

p=uud
n=udd doppietto di isospin $\binom{p}{n}$ doppietto di isospin $\binom{u}{d}$

A livello fondamentale il decadimento beta è quindi la trasformazione del quark u in d (o viceversa) con emissione di un elettrone (positrone) ed un antineutrino (o neutrino)

$n \rightarrow p + e^{-} + \overline{\nu}_e \Leftrightarrow d \rightarrow u + e^{-} + \overline{\nu}_e$

$c_v = 1 \quad c_a = -1$

Quark è un fermione puntiforme

$p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e \Leftrightarrow u \rightarrow d + e^{+} + \nu_e$

Struttura nucleone e forza forte alterano un poco $c_a \rightarrow -1.25$

Decadimento beta dei nuclei

Cambia l'energia disponibile $E_0^5 \rightarrow \Delta E^5$

M_{fi} è calcolato sull'overlap delle funzioni d'onda del nucleo

$$<pe\nu|H_w|n>_i=\int d^3x \, \frac{e^{-i\underline{k}_p \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_e \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_\nu \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{i\underline{k}_n \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} H_w$$

$$\Downarrow$$

$$<pe\nu|H_w|n>= \int d^3x \psi_p^*(\underline{x}) \frac{e^{-i\underline{k}_e \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \frac{e^{-i\underline{k}_\nu \cdot \underline{x}}}{V^{+1/2}} \psi_n(\underline{x}) H_w$$

$$<pe\nu|H_w|n> \sim \int d^3x \psi_p^*(\underline{x}) \psi_n(\underline{x}) H_w$$

$$1/\tau \sim \left|\int d^3x \psi_p^*(\underline{x}) \psi_n(\underline{x})\right|^2 \frac{G_F^2}{\hbar} \frac{\Delta E^5}{60\pi^3} \; (c_v^2+3c_a^2)$$

$\psi(\underline{x})$ sono le funzioni d'onda dei nucleoni nel nucleo e non onde piane come nel caso del neutrone (beta decay permette di studiare la struttura dei nuclei)

- decadimenti super-permessi $\psi_p(\underline{x})=\psi_n(\underline{x})$ con overlap = 1
- ^{14}C e ^{40}K overlap ridotto

Decadimento alfa

Libro:

3.2 Decadimento alfa.

- Probabilità di superamento barriera couloumbiana
- Vita media
- Catena di decadimento alfa ^{238}U (Figura 3.7)

3.3 Fissione

- spontanea (no conto nucleo deformato)
- indotta

Dispense:

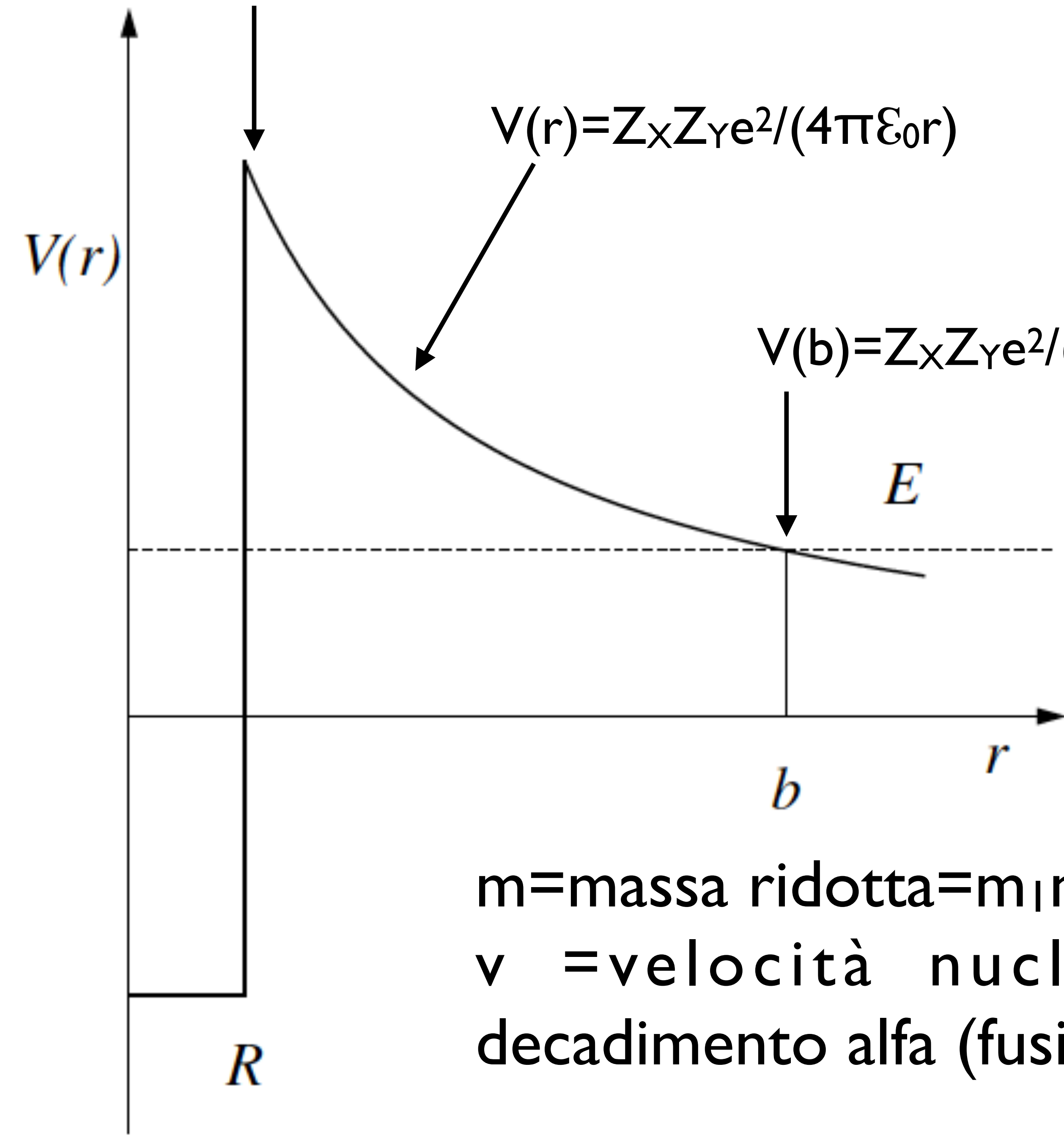
3.3 Fusione non risonante di particelle cariche
(fino ad equazione 3.50)

Barriera coulombiana

$V(R)=Z_X Z_Y e^2/(4\pi\varepsilon_0 R)$

$V(r)=Z_X Z_Y e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$

$V(b)=Z_X Z_Y e^2/(4\pi\varepsilon_0 b)=E=1/2mv^2$



m=massa ridotta=$m_1 m_2/(m_1+m_2)$
v =velocità nucleo Y dopo (prima) decadimento alfa (fusione non risonante)

Vita media decadimento alfa

$$\boxed{\tau_\alpha^{-1}=p_{formazione}F_{urti}T_{tunneling}}$$

$T_{tunneling}=e^{-\pi\eta(E)}$ $\eta(E)=\{2m/(E\hbar^2)\}^{1/2}Z_XZ_Ye^2/(4\pi\varepsilon_0)=2(Z-2)\alpha_{em}/\beta \propto E^{-1/2}$

$\lambda=h/p=h/(2mE)^{1/2}=h/(c\beta)$ m=massa ridotta=$m_1m_2/(m_1+m_2)$ e $\beta=v/c$

$p_{formazione}$=probabilità di formazione di una particella nel nucleo (prossima a 1 per nucleo elio e praticamente nulla per A>4)

F_{urti}=numero di urti nell'unità di tempo contro la barriera coulombiana=$2v/R=2c\beta/R$ R=raggio del nucleo

$$\boxed{\tau_\alpha=p_{formazionei}^{-1}2c\beta/Re^{-4\pi(Z-2)\alpha_{em}/\beta}}$$

Sezione d’urto delle reazioni nucleari

Libro:
4.2 Sezione d’urto
4.3 Regola d’oro

Dispense:

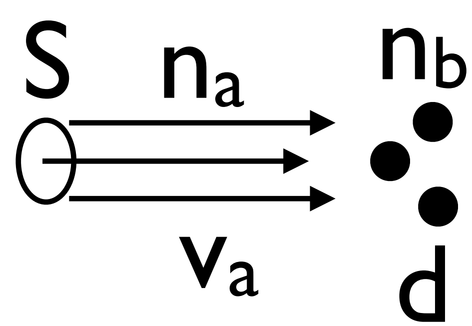
3.1 Introduzione
3.2.3 Risonanze
3.3 Fusione non risonante di particelle cariche
3.4 Reazioni con risonanza

Sezione d'urto

Sperimentalmente ciò che si misura è il tasso R=N/T (o rate) di una interazione, cioè il numero di interazioni che avvengono in un secondo.

Il rate dipende dalle condizioni dell'esperimento mentre la sezione d'urto σ è una proprietà intrinseca dell'interazione e viene definita in modo operativo mediante il rate.

Fascio di particelle proiettile di densità n_a, velocità v_a e area S



Bersaglio spesso d e fermo di particelle di densità n_b investite dal fascio di particelle proiettile

Geometricamente una coppia qualunque di particelle proiettile e bersaglio hanno una probabilità di interagire data da:

$$p = \frac{\sigma}{S}$$

ipotesi no ombra tra bersagli

la lunghezza z del fascio che nell'intervallo di tempo T attraversa il bersaglio è data da $z=v_aT$

quindi nell'intervallo di tempo T il numero di coppie proiettile e bersaglio che possono interagire sono rispettivamente

$N_a=n_aSz$ $N_b=n_bSd$ ipotesi $d<<z$

quindi

rate di interazione = R = N/T = $N_aN_bp/T= n_aSv_an_bd\sigma=\Phi_an_bSd\sigma$

$$\boxed{R_{ab\rightarrow cd} = \Phi_aN_b\sigma_{ab\rightarrow cd}} \qquad \boxed{\sigma_{ab\rightarrow cd} = R_{ab\rightarrow cd} /(\Phi_a N_b)}$$

dove $\Phi_a=n_av_a$ è il flusso del fascio proiettile (particelle per unità di superfice e di tempo)

N_b è il numero di particelle bersaglio colpite dal fascio

$R_{ab\rightarrow cd}$ e $\sigma_{ab\rightarrow cd}$ sono rate e sez. d'urto del processo $a+b\rightarrow c+d$

Sezione d'urto ed ampiezza di transizione

Abbiamo già visto che la regola d'oro di Fermi corrisponde alla probabilità di decadimento di una particella

$$\frac{1}{\tau_{decay}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2 \ \frac{dn}{dE}(E)$$

In un processo di interazione invece la regola d'oro di Fermi corrisponde a $N_a=n_aV=1$ e $N_b=1$ quindi l'ampiezza di transizione è legata al rate alla sezione d'urto dalla formula:

$$R_{ab\to cd}=N_aN_bp/T=p/T= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2 \ \frac{dn}{dE}(E)$$

$$R_{ab\to cd}= \Phi_aN_b\sigma_{ab\to cd}= \Phi_a\sigma_{ab\to cd}= v_a/V\sigma_{ab\to cd}$$

$$\boxed{\sigma_{ab\to cd}= \frac{2\pi V}{\hbar v_a} |\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2 \ \frac{dn}{dE}(E)}$$

L'elemento di matrice deve essere proporzionale a $V^{-1/2}$

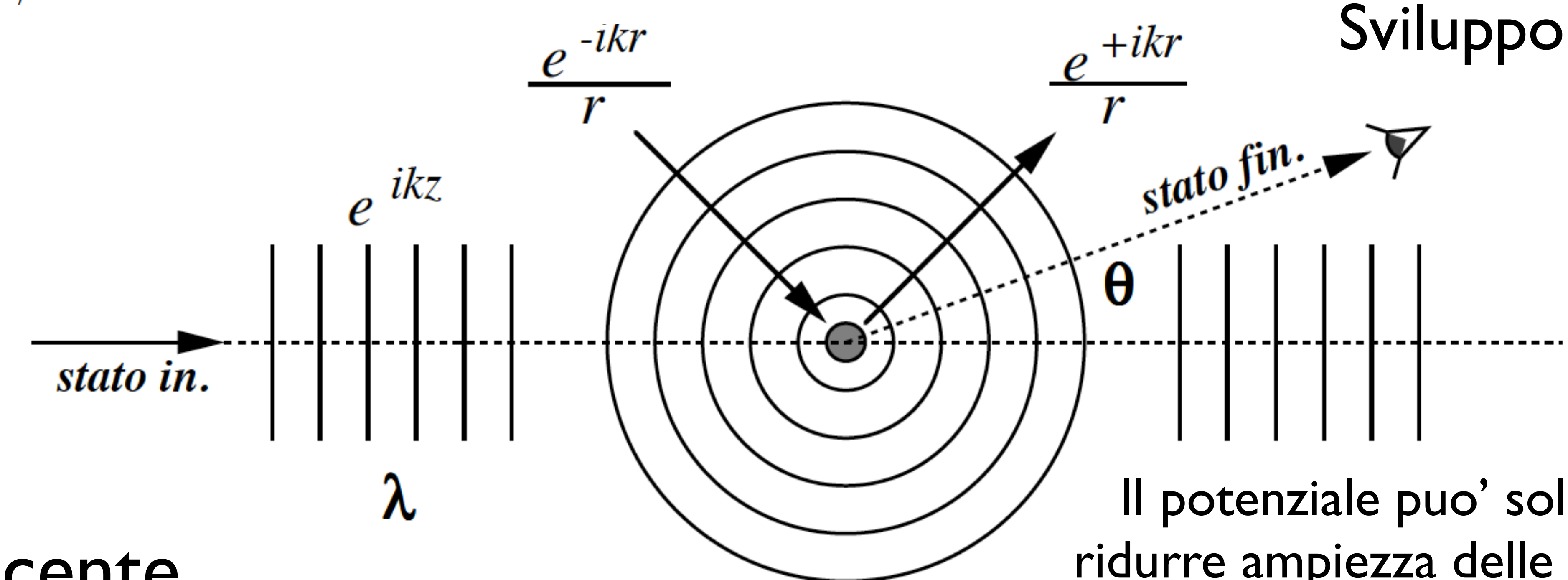
Diffusione di una particella da potenziale

Onda incidente

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\, e^{ikz}$$

$$\lim_{r\to\infty} u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\left[(-1)^l\,\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

Sviluppo in onde parziali



Onda uscente

Il potenziale puo' solo cambiare fase e ridurre ampiezza delle onde radiali uscenti

$$u_f(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\left[e^{ikz} + f(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

$$u_f(r,\theta) \lim_{r\to\infty} \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\left[(-1)^l\,\frac{e^{-ikr}}{r} - a_l\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

Sviluppo in onde parziali

Onda diffusa=Onda uscente-Onda incidente

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) \lim_{r\to\infty} \frac{i}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

Tutta l'interazione e' contenuta nelle fasi δ_l (interazione elastica) e nei coefficienti di assorbimento η_l (int. anelastica) di ogni singola onda parziale l.

$$a_l = \eta_l\, e^{2i\delta_l} \qquad \text{con} \quad \eta_l \quad \delta_l \quad \text{reali} \qquad 0 \le \eta_l \le 1$$

Sezione d'urto differenziale

flusso particella incidente

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\, e^{ikz} \qquad \Phi_i = \frac{\hbar}{2im}\left(u_i^* \nabla u_i - u_i \nabla u_i^*\right) = \frac{\hbar k}{Vm}$$

flusso particella diffusa

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) = \frac{1}{V^{1/2}} f(\theta,\phi)\, \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Phi_d = \frac{\hbar}{2imV}\, |f(\theta,\phi)|^2 \left[\frac{e^{-ikr}}{r}\, \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-ikr}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\, \frac{\hbar k}{Vm}\, |f(\theta,\phi)|^2$$

$$\boxed{r^2\Phi_d = \Phi_i\, |f(\varphi,\theta)|^2} \qquad d\sigma = \frac{dR}{\Phi_i} = \frac{\Phi_d r^2 d\Omega}{\Phi_i} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dR}{\Phi_i} = \frac{\Phi_d r^2}{\Phi_i}$$

dR=probabilità di diffusione nell'angolo $d\Omega$ nell'unità di tempo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\varphi,\theta)|^2}$$

sez. d'urto differenziale

Sez. d'urto di diffusione elastica

La diffusione dal potenziale è rappresentata dallo stato

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

$|f_{diffusione,l}(\varphi,\theta)|^2 \propto |1\text{-}a_l|^2$

con ampiezza di diffusione

$$f(\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

Troviamo quindi la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)(1-a_l^*)(1-a_{l'})\ P_l P_{l'}$$

e, usando la proprietà di ortonormalità dei polinomi di Legendre,

$$\int P_l(\cos\theta)P_l'(\cos\theta)\ d\cos\theta d\phi = \frac{4\pi}{2l+1}\ \delta_{ll'}$$

troviamo la *sezione d'urto di diffusione*

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\ d\cos\theta d\phi = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)(1-a_l^*)(1-a_{l'})\ \frac{4\pi}{2l+1}\ \delta_{ll'}$$

$$\sigma_d = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)|1-a_l|^2$$

Sez. d'urto elastica

Sez. d'urto di diffusione $\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)\,|1 - a_l|^2$

Processo solo elastico $|a_l|=1$, $a_l=e^{i2\delta_l}$ $\sigma_r=0$ (vedi slide dopo)

Ampiezza elastica

$$f_{elastica,l} = \frac{i}{2k}(2l+1)(1-e^{i2\delta_l})Pl(\theta) = \frac{1}{k}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l Pl(\theta)$$

$$|1-a_l|^2 = |1-\cos 2\delta_l - i\sin 2\delta_l|^2 = 1-2\cos(2\delta_l)+\cos^2(2\delta_l)+\sin^2(2\delta_l)$$
$$=2-2\cos(2\delta_l)=2(1-\cos(2\delta_l))=4\sin^2\delta_l$$

Terza formula di Werner

Notare il fattore 4

Sez. d'urto elastica $$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

Sez. d'urto di reazione (o anelastica)

$|f_{anelastica,l}(\varphi,\theta)|^2 = |f_{i,l}(\varphi,\theta)|^2 - |f_{f,l}(\varphi,\theta)|^2 \propto (1-|a_l|^2)$

Flusso anelastico uscente è quello perso dall'onda finale rispetto a quella iniziale

$$\lim_{r\to\infty} u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\left[(-1)^l\,\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

$$u_f(r,\theta) \lim_{r\to\infty} \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\left[(-1)^l\,\frac{e^{-ikr}}{r} - a_l\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

Sez. d'urto di reazione

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\left(1-|a_l|^2\right)$$

Sezione d'urto totale

$|1-a_l|^2+(1-|a_l|^2)=(1-a_l)(1-a_l^*)+(1-|a_l|^2)=(2-2\mathrm{Re}\,a_l)$ Re=parte reale
Im=parte imm.

Sez. d'urto totale Notare il fattore 2

$$\sigma_T = \sigma_r + \sigma_{el} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\left(1 - Re\, a_l\right)$$

1) Limite di unitarietà $\sigma_{T,l} \leq \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)$

2) Teorema ottico $\sigma_T = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}F$

F=ampiezza di scattering di diffusione in avanti $\theta=0$ $P_l(0)=1$

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\lim} \frac{i}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

Disco assorbente di raggio R

Disco assorbente $|a_l|=0$ per $l \leq l_{max}$; e $a_l=1$ per $l>l_{max}$

La sezione d'urto elastica non è mai nulla $\sigma_r=\sigma_{el}=\sigma_T/2$

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) = \frac{2\pi}{k^2} (l_{max}+1)^2 = 2\pi(R+\lambda\!\!\!^{-})^2$$

$R+\lambda\!\!\!^{-}$ massima distanza di interazione tra buca di raggio R e particella con lunghezza d'onda di De Broglie λ infatti $l_{max}\hbar=L_{max}=pR$ quindi

$(l_{max}+1)/k=R+\lambda\!\!\!^{-}$ dove $\lambda\!\!\!^{-}=\lambda/(2\pi)$

$\lambda\!\!\!^{-}=\hbar/p=\hbar/(2mE)^{1/2}=\hbar/(c\beta)$ m=massa

ridotta$=m_1m_2/(m_1+m_2)$ e $\beta=v/c$

$\sigma_r=\pi(R+\lambda\!\!\!^{-})^2$

Sezione d'urto di fusione non risonante

Valutiamo la fusione non risonante come prodotto tra sez. d'urto disco assorbente e probabilità di superamento barriera coulombiana

$$\boxed{\sigma_{fusione}=\sigma_{disco\ assorbente}\ T_{tunneling}}\quad X+Y\rightarrow Z$$

$R<<\lambdabar \quad \sigma_{disco\ assorbente}(E)=\pi\lambdabar(E)^2=\pi\hbar^2/p(E)^2=\pi\hbar^2/(2mE)\propto E^{-1}$

$T_{tunneling}=e^{-\pi\eta(E)}$ $\quad \eta(E)\propto E^{-1/2}$ parametro di Sommerfeld

$$\eta(E)=\{2m/(E\hbar^2)\}^{1/2}Z_XZ_Ye^2/(4\pi\varepsilon_0)=Z_XZ_Y\alpha_{em}/\beta$$

$$\boxed{\text{In generale } \sigma_{el}=S(E)/E e^{-\pi\eta(E)}}$$

$\eta(E)\propto E^{-1/2}$ parametro di Sommerfeld, dipendenza esponenziale da E

$S(E)=S_0+S_1E+S_2/2\ E^2+\ldots=S_0e^{-\alpha E}$ fattore astrofisico contiene i veri dettagli della struttura nucleare dei due nuclei interagenti.

Nota bene

La reazione di fusione

$$X+Y\rightarrow Z$$

non può avvenire nel vuoto perchè non si può conservare energia e momento nello stesso tempo.

Il problema non si poneva per la diffusione di una particella dal potenziale V

La reazione di fusione è sempre accompagnata da un fotone anche se spesso è trascurabile

$$X+Y\rightarrow Z+\gamma$$

Risonanza elastica

Processo solo elastico $|\eta_l|=1$ $\sigma_{el}(E)=4\pi/k^2\sum(2l+1)\sin^2\delta_l(E)$

$$f_{elastica,l}=\frac{1}{k}(2l+1)e^{i\delta l}\sin\delta_l Pl(\theta)$$

Se $\delta_l(E_0)=\pi/2+n\pi$ la sezione d'urto in onda *l* satura il limite di unitarietà e si ha formazione di una risonanza.

$$\frac{\sin\delta_l}{e^{-i\delta l}}=\frac{\sin\delta_l}{\cos\delta_l-i\sin\delta_l}=\frac{1}{\cot g\delta_l-i}=\frac{1}{(E-E_0)2/\Gamma-i}$$

$$\delta_l(E)=\delta_l(E_0)+(E-E_0)2/\Gamma+\ldots$$

$$f_{elastica,l}=\frac{2l+1}{k}\frac{\Gamma/2}{(E-E_0)-i\Gamma/2}Pl(\theta)$$

Energia della risonanza=E_0
Vita media della risonanza = Γ
Momento angolare della risonanza =*l*

$$\sigma_l(E)=4\pi(2l+1)/k^2|f_l(E)|^2=\pi/k^2\,(2l+1)\,\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

$$\sigma_l(E)=\pi\hbar^2/p^2\,(2l+1)\,\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

$$\sigma_l(E)=\pi\hbar^2/(2mE)\,(2l+1)\,\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

dipendenza 1/E dall'energia   Funzione di Breit-Wigner

La risonanza sul picco satura la sezione d'urto raggiungendo il limite della unitarietà

$$\sigma_l(E_0)=4\pi\hbar^2/(2mE)(2l+1)=4\pi/k^2(2l+1)$$

Risonanza anelastica multicanale

In presenza di canali non elastici o multicanali la risonanza elastica non può saturare la sezione d'urto totale e si introduce un accoppiamento comune g<1 ed una larghezza Γ_i per ogni canale ($\sum\Gamma_i=\Gamma$).

Canale di formazione

Canale di decadimento

$$\sigma_{a+b\rightarrow R\rightarrow c+d}(E)=\pi/k^2\,(2l+1)\,\frac{g\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

processo anelastico multicanale $a+b\rightarrow X\rightarrow c_i+d_i$

Frazione di decadimento = Γ_i/Γ

<u>Al denominatore appare sempre e solo Γ perchè la risonanza come tutte le particelle ha una sola vita media</u>